Svolgimento Esercitazione 1 (Prof. F. Flamini)

Esercizio 1

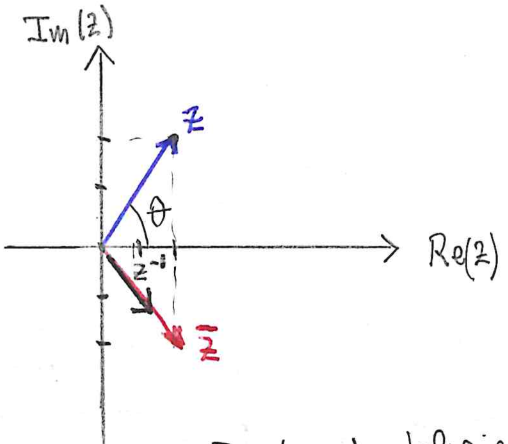
(i) $z = 1 + i \implies \bar{z} = 1 - i$

$\| z \| = z \cdot \bar{z} = 1 + 1 = 2 \qquad \implies z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{\| z \|} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} i = \dfrac{1}{2} \cdot \bar{z}$

Infatti

$$z \cdot z^{-1} = (1 + i) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} i + \frac{1}{2} = 1$$

(ii)



(iii) z corrisponde al punto $P = (1,1)$ del piano di Argand-Gauss

$\implies |z| = \sqrt{\| z \|} = d(O,P) = \sqrt{2}$ sia $\rho = \sqrt{2}$ modulo di z

Sia θ = angolo convesso formato da z e asse Re(z)

θ = anomalia di z

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \cdot (\cos\theta + i \sin\theta) \iff$$

$$\begin{cases} 1 = \sqrt{2} \cos\theta \\ 1 = \sqrt{2} \sin\theta \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \iff \theta = \frac{\pi}{4}$$

Pertanto

$$z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$ rappresentazione polare o trigonometrica di z

$$z^3 = (\sqrt{2})^3 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)^3$$

Osservazione

se $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e $w = \lambda(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

$$z \cdot w = \rho\cdot\lambda\left[(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) + i\,(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha)\right]$$

$$= \rho\cdot\lambda\left[\cos(\theta+\alpha) + i\sin(\theta+\alpha)\right]$$

In particolare

$$\boxed{z^n = \rho^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)}$$

Pertanto nel nostro caso

$$z^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -2 + 2i = 2(-1+i)$$

Poiché $z^{-3} = (z^3)^{-1}$ si tratta di calcolare l'inverso moltiplicativo di z^3

$$\overline{z^3} = -2 - 2i, \quad \|z^3\| = 8 \Rightarrow z^{-3} = -\frac{2}{8} - \frac{2}{8}i = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$$

(iv) Siccome $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ è un polinomio cubico a coefficienti reali, sicuramente avrà una radice reale che è

$$x_1 = 1 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Pertanto $p(x) = (x-1)\cdot(x^2 - 2x + 2) = (x-1)\cdot q(x)$

Notiamo che $z = 1+i$ annulla $q(x)$ infatti

$$(1+i)^2 - 2(1+i) + 2 = \cancel{1} + \cancel{2i} - \cancel{1} - \cancel{2} - \cancel{2i} + \cancel{2} = 0$$

$\Rightarrow$ la seconda soluzione di $p(x)$ è $x_2 = 1 + i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

Poiché $q(x)$ e $p(x)$ a coeff. reali, anche $x_3 = 1 - i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ è necessariamente soluzione

Esercizio 2

(i) $U_1 \subset \mathbb{R}^3$ è sp. vettoriale infatti se

$\underline{v}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ sono due arbitrarie terne di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano l'equazione $x + 2y - z = 0$, allora per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\alpha \underline{v}_0 + \beta \underline{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_0 + \beta x_1 \\ \alpha y_0 + \beta y_1 \\ \alpha z_0 + \beta z_1 \end{pmatrix}$$

è t.c.

$$(\alpha x_0 + \beta x_1) + 2(\alpha y_0 + \beta y_1) - (\alpha z_0 + \beta z_1) =$$

$$\alpha(\underbrace{\cancel{x_0 + 2y_0 - z_0}}_{=0}) + \beta(\underbrace{\cancel{x_1 + 2y_1 - z_1}}_{=0}) = 0$$

(ii) U_2 non contiene $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to$ non può essere sottospazio

(iii) U_3 contiene $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma non è chiuso rispetto alle combinazioni lineari. Infatti

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3 \quad \text{ma} \quad \underline{v} + \underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_3$$

visto che $1 \cdot 1 \neq 0$

(iv) U_4 contiene $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ma non è chiuso rispetto alle combinazioni lineari

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_4 \quad \text{ma} \quad 2\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin U_4$$

Esercizio 3

(i)

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 & -1/2 \\ -5 & -1/3 & +2/5 \\ 10 & -2/5 & -1/5 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 \\ 2/3 & 1/3 & 2/5 \\ 1/2 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\frac{1}{2} A + 4A^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/2 \\ 5 & 1/3 & -2/5 \\ -10 & 2/5 & 1/5 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 & 5 & -10 \\ 2/3 & 1/3 & 2/5 \\ 1/2 & -2/5 & 1/5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 5/2 & 1/6 & -1/5 \\ -5 & 1/5 & 1/10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 20 & -40 \\ 8/3 & 4/3 & 8/5 \\ 2 & -8/5 & 4/5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4+1/2 & 20+1/3 & -40+1/4 \\ 5/2+8/3 & 1/6+4/3 & -1/5+8/5 \\ -5+2 & 1/5-8/5 & 1/10+4/5 \end{pmatrix} = \cdots$$ finire conti da soli

(iii) Sia $C = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$

$$3B+2C = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1+3 & 2x_2+6 \\ 2x_3 & 2x_4+9 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{cases} 2x_1+3=0 \\ 2x_2+6=0 \\ 2x_3=0 \\ 2x_4+9=0 \end{cases} \iff \begin{matrix} x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -9/2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -3/2 & -3 \\ 0 & -9/2 \end{pmatrix}$$

<u>Esercizio 4</u>

(i) Se $p(x), q(x) \in W$, allora, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$(\alpha p + \beta q)(x) \in \mathbb{R}[x]$ è t.c. $(\alpha p + \beta q)(2) = \alpha p(2) + \beta q(2) = 0$

$\Rightarrow (\alpha p + \beta q)(x) \in W$ e dunque W è sottospazio

(ii) $x-1 \in \mathbb{R}[x] \setminus W$ perciò $W \subsetneq \mathbb{R}[x]$

(iii) Se $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]_{\leq 4}$, allora $\deg(p) \leq 4$ e $\deg(q) \leq 4$

È dunque chiaro che, $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$,

$(\alpha p + \beta q)(x) = \alpha p(x) + \beta q(x)$ ha grado ≤ 4

Pertanto $\mathbb{k}[x]_{\leq 4}$ è sottospazio di $\mathbb{k}[x]$.

Poiché W è sottospazio di $\mathbb{k}[x] \Rightarrow W \cap \mathbb{k}[x]_{\leq 4}$ è sottospazio

Infine

$$W \cap \mathbb{k}[x]_{\leq 4} = \{ p(x) \in \mathbb{k}[x]_{\leq 4} \mid p(2) = 0 \}$$

cioè $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

t.c. $\quad 0 = p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4$

i.e. $\quad a_0 = -(2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4)$

Quindi

$$p(x) = a_1(x-2) + a_2(x^2-4) + a_3(x^3-8) + a_4(x^4-16)$$

oppure $\quad p(x) = (x-2)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$

(iv) $W \cup \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ non è sottospazio

infatti $(x-2)^6 \in W$, $(x-1) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

ma $f(x) := 1 \cdot (x-2)^6 + 1(x-1) \notin W \cup \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

infatti $\deg(f(x)) = 6 > 4$ e $f(2) \neq 0$

pertanto $f(x) \notin W \wedge f(x) \notin \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

Esercizio 5

(i) $M \in Sym \Leftrightarrow M = M^t$

se $M, N \in Sym$, per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha M + \beta N)^t = \alpha M^t + \beta N^t = \alpha M + \beta N \in Sym$$

$M \in Antisym \Leftrightarrow M^t = -M$, $\forall M, N \in Antisym$ e $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha M + \beta N)^t = \alpha M^t + \beta N^t = -\alpha M - \beta N = -(\alpha M + \beta N) \in Antisym$$

Symm e Antisymm sono dunque sottospazi

Poiché $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} \in V \setminus (\text{Symm} \cup \text{Antisymm})$

si ha che entrambi sono sottospazi propri

(ii) Se $M \in \text{Symm} \cap \text{Antisymm}$

$$M = M^t \quad \wedge \quad M = -M^t$$

i.e. $M = -M \iff 2M = 0 \iff M = 0$

Dunque $\text{Symm} \cap \text{Antisymm} = \{0\}$

(iv) Per ogni $M \in V$

<u>$M + M^t \in$ Symm infatti</u>

$$(M + M^t)^t = M^t + (M^t)^t = M^t + M = M + M^t$$

<u>$M - M^t \in$ Antisymm</u> infatti

$$(M - M^t)^t = M^t - M = -(M - M^t)$$

Allora $M = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t)$

è una scrittura cercata

Vediamo che sia unica

Se esistessero $S \in$ Symm, $A \in$ Antisymm t.c.

$$M = \alpha S + \beta A \qquad \text{per } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ opportuni}$$

$$M = \frac{1}{2}(M + M^t) + \frac{1}{2}(M - M^t)$$

darebbe, sottraendo membro a membro

$$0 = \alpha S - \frac{1}{2}(M + M^t) + \beta A - \frac{1}{2}(M - M^t)$$

Pertanto

$$\underbrace{\alpha S - \frac{1}{2}(M+M^t)}_{\substack{\cap \\ \text{Symm} \\ \text{perché Symm} \\ \text{sottospazio}}} = \underbrace{\frac{1}{2}(M-M^t) - \beta A}_{\substack{\cap \\ \text{Antisymm} \\ \text{perché Antisymm} \\ \text{sottospazio}}} := C$$

La matrice C così determinata sarebbe

$$C \in \text{Symm} \cap \text{Antisymm} = \{0\} \Rightarrow C = 0$$

cioè $\begin{cases} \beta A = \frac{1}{2}(M-M^t) \\ \alpha S = \frac{1}{2}(M+M^t) \end{cases}$ quindi scrittura unica

Esercizio 6

$$\mathbb{K}[x] \xrightarrow{\Phi} \text{Fun}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$$

$$p(x) \longrightarrow f_p : \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ a \longrightarrow p(a) \end{array}$$

(i) Presi $p(x), q(x) \in \mathbb{K}[x]$

$$\phi(p(x)) = f_p = f_q = \phi(q(x))$$

se e solo se i polinomi $p(x)$ e $q(x)$ assumono gli stessi valori su tutti gli elementi di $\mathbb{K}$, i.e. se e solo se

$$\phi(p(x) - q(x)) = (f_p - f_q) : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

è la funzione identicamente nulla su $\mathbb{K}$, equivalentemente se e solo se $p(x) - q(x)$ si azzera su tutto $\mathbb{K}$.

Poiché $\mathbb{K}$ è infinito, mentre $\deg(p(x) - q(x)) < +\infty$ allora, per il Thm. fondamentale dell'Algebra

il polinomio $p(x) - q(x)$ ha al più tanti zeri in $\mathbb{K}$ quanto è il suo grado.
L'unica possibilità è dunque che $p(x) - q(x)$ sia identicamente nullo, i.e. $p(x) \equiv q(x)$ cioè Φ iniettiva

(ii) Se $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ consideriamo

$$x^2 + x \in \mathbb{Z}_2[x] \setminus \{0\}$$

Poiché $1 \cdot 1 = 1$ e $1 + 1 = 0$ in $\mathbb{Z}_2$,

$p(x) = x^2 + x$ si annulla su tutto $\mathbb{Z}_2$, ma non è il polinomio identicamente nullo
Pertanto

$$\phi(p(x)) = \phi(0) = 0 : \begin{array}{l} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ a \longrightarrow 0 \end{array}$$

anche se $p(x) \neq 0$. Quindi ϕ non iniettiva