1. *Calcolare il rango delle seguenti matrici*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo innanzitutto che tutte queste matrici hanno rango *al più* tre. Con il metodo di eliminazione di Gauss (per righe), troviamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango due.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 22 & 10 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango due.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango due.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango tre.}$$

2. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici*

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \det\begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = -1 \quad \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+2}\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -5.$$

3. *Siano date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$, $\det(BA)$, $\det A^{-1}$, $\det(A+B)$*;*
(ii) Calcolare $\det C$, C^{-1}, C^{-2}.

(i)

$$\det A = -18, \quad \det B = -30, \quad \det AB = \det A \det B = 540, \quad \det BA = \det B \det A = 540.$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{18}, \qquad \det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} = -232.$$

(ii)

$$\det C = 1 \cdot (-1)^{4+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad \det C^{-1} = 1, \quad \det C^{-2} = 1.$$

4. *Siano date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$*. Calcolare* A^{-1}*,* B^{-1}*,* $(AB)^{-1}$*,* $(2BA)^{-1}$*,* $({}^tA)^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(2BA)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. *Sia* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *a sia* P *il parallelogramma costruito sui vettori* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$*. Allora*

$$Area(P) = |\det A|.$$

Disegnare i parallelogrammi costruiti sulle seguenti coppie di vettori e calcolarne l'area

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Le aree dei parallelogrammi, costruiti sulle coppie di vettori qui sopra, sono rispettivamente uguali a

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 6.$$

6. *Sia* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *a sia* P *il parallelepipedo costruito sui vettori* $\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$*. Allora*

$$Vol(P) = |\det A|.$$

Calcolare i volumi dei parallelepipedi costruiti sui vettori

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

I volumi dei parallelepipedi, costruiti sulle triple di vettori qui sopra, sono rispettivamente uguali a

$$0, \quad 8, \quad 0, \quad 3.$$