1. *Calcolare il rango delle seguenti matrici*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo innanzitutto che tutte queste matrici hanno rango *al più* tre. Con il metodo di eliminazione di Gauss (per righe), troviamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 11 & 22 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango due.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 12 & 22 & 10 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 11 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango due.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango due.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rango tre.}$$

2. *Calcolare il determinante delle seguenti matrici*

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix} = -1 \quad \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2, \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+2} \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -5.$$

3. *Siano date le matrici*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$, $\det(BA)$, $\det A^{-1}$, $\det(A+B)$;
(ii) Calcolare $\det C$, C^{-1}, C^{-2}.

(i)

$$\det A = -18, \quad \det B = -30, \quad \det AB = \det A \det B = 540, \quad \det BA = \det B \det A = 540.$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{18}, \qquad \det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix} = -232.$$

(ii)

$$\det C = 1 \cdot (-1)^{4+1} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1, \quad \det C^{-1} = 1, \quad \det C^{-2} = 1.$$

4. *Siano date le matrici* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. *Calcolare* A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(2BA)^{-1}$, $({}^tA)^{-1}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$(2BA)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad ({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. *Sia* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *a sia* P *il parallelogramma costruito sui vettori* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. *Allora*

$$Area(P) = |\det A|.$$

Disegnare i parallelogrammi costruiti sulle seguenti coppie di vettori e calcolarne l'area

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \quad \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

Le aree dei parallelogrammi, costruiti sulle coppie di vettori qui sopra, sono rispettivamente uguali a

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 6.$$

6. *Sia* $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *a sia* P *il parallelepipedo costruito sui vettori* $\begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ e \\ h \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$. *Allora*

$$Vol(P) = |\det A|.$$

Calcolare i volumi dei parallelepipedi costruiti sui vettori

$$\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \quad \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \quad \{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

I volumi dei parallelepipedi, costruiti sulle triple di vettori qui sopra, sono rispettivamente uguali a

$$0, \quad 8, \quad 0, \quad 3.$$

1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare e disegnare i seguenti vettori:

$$A+B, \quad A-B, \quad A+B+C, \quad 2A+B-3C, \quad tA+(1-t)B,\ t\in[0,1], \quad A+tC,\ t\in[0,1].$$

Sol.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A-B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A+B+C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 2A+B-3C = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$tA+(1-t)B,\ t\in[0,1]$ è il segmento congiungente A e B;
$A+tC,\ t\in[0,1]$ è il segmento congiungente A e $A+C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare e disegnare i seguenti vettori:

$$A+B, \quad A-C, \quad A+B+C, \quad 2A+B-3C, \quad tA+(1-t)B,\ t\in[0,1], \quad A+tD,\ t\in[0,1].$$

Sol.

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A-C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A+B+C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 2A+B-3C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$tA+(1-t)B,\ t\in[0,1]$ è il segmento congiungente A e B;
$A+tD,\ t\in[0,1]$ è il segmento congiungente A e $A+D = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$:

$$A = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2\} \qquad B = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2\};$$

$$C = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0\} \qquad D = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 - 3x_2 = 1\};$$

(ii) Dati $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$X\in A, \quad 2X\in A, \quad O\in A, \quad X\in B, \quad 3X\in B, \quad O\in B, \quad X\in D,$$

$$Y\in D, \quad O\in D, \quad 2Y\in D, \quad -Y\in D, \quad X\in C, \quad Y\in C, \quad X+Y\in C, \quad -X\in C$$

$$\forall\lambda\in\mathbf{R}, \quad \lambda X\in A, \qquad \forall\lambda\in\mathbf{R}, \quad \lambda X\in C.$$

(iii) Decidere se A, B, C, D sono sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^2$.

Sol. (i) A è la retta passante per l'origine e per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;
B è la retta verticale passante per il punto $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;
C è il semipiano delle x_1 positive (a destra dell'asse delle x_2);
D è la retta passante per i punti $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
(ii) Vera; vera; vera; vera; falsa; falsa; falsa; vera; falsa; falsa; falsa; vera; vera; vera; falsa; vera; falsa.
(iii) A è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^2$: Siano $a_1 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}$ e $a_2 = \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix}$ due elementi generici di A (cioè con la prima coordinata uguale e due volte la seconda). Si ha infatti che

$$a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2s \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(t+s) \\ (t+s) \end{pmatrix} \in A, \quad \lambda a_1 = \lambda \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda t \\ \lambda t \end{pmatrix} \in A, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

B, C e D non lo sono (una buona ragione è, ad esempio, che nessuno tra B, C e D contiene il vettore nullo $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.)

5. Apostol, Sezione 1.4, pag. 21-22: Esercizi 1,2,3,4,5,6,7,8.

6. (i) Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$

$$U = \{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} : 0 < t < 1 \}, \quad V = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}, \quad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid x_3 \geq 0 \}.$$

(ii) Dati $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, aiutandosi anche con il disegno, verificare quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false:

$$O \in U, \quad O \in V, \quad O \in W, \quad Y \in U, \quad \frac{1}{3} Y \in U, \quad 2Y \in V$$

$$X \in W, \quad Y \in W, \quad X + Y \in W, \quad -X \in W, \quad X - Y \in W$$

(iii) Decidere se U, V, W sono o meno sottospazi vettoriali di $\mathbf{R}^3$.

Sol. (i) U è il segmento congiungente l'origine con $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, estremi esclusi. V è l'origine, W è il semispazio superiore, ossia la parte di spazio che sta sopra il piano orizzontale e il piano orizzontale stesso.
(ii) Falsa; vera; vera; falsa; falsa; falsa; vera; vera; vera; falsa; falsa.
(iii) V è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ (il sottospazio banale); U e W non lo sono (ad esempio, U non contiene il vettore nullo O, mentre W se contiene un vettore X non contiene il suo opposto $-X$).