1. Determinare quali delle quaterne

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono soluzioni del sistema di tre equazioni in 4 incognite

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 1 \\ x_1 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Sol. Sostituendo ad x_1, x_2, x_3 ed x_4 i valori forniti dalle coordinate del primo vettore troviamo che la prima equazione del sistema diventa

$$2 + 2 + 0 = 0$$

che chiaramente non è verificata. Non essendo soluzione di una delle equazioni, la quaterna non può essere soluzione del sistema. Per quanto riguarda la conda quaterna, si vede facilmente che le sue coordinate soddisfano le prime due equazioni del sistema ma non la terza: neppure la seconda quaterna è soluzione del sistema. Infine si verifica che nè le coordinate della terza quaterna nè quelle della quarta soddisfano la prima equazione del sistema: nessuna delle quaterne assegnate è soluzione del sistema.

2. Scrivere il sistema lineare la cui matrice completa è data da

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

È compatibile?

Sol. Il sistema lineare richiesto è

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_4 & +x_6 & = 2 \\ -x_1 & +x_2 & -x_4 & & = 1 \\ 0 & & & & = 3 \end{cases}$$

La terza equazione del sistema, $0 = 3$, chiaramente non può avere alcuna soluzione. Ne segue che il sistema è incompatibile.

3. Risolvere il sistema lineare di due equazioni in due incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Sol. Sebbene si tratti di un sistema molto semplice, che si potrebbe facilmente risolvere per sostituzione, utilizziamo il metodo dell'eliminazione gaussiana, per cominciare ad impratichirci.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema lineare troviamo la soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

4. Risolvere il sistema lineare di due equazioni in tre incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Sol. Dobbiamo fare attenzione alla presenza di una terza variabile x_3. Il fatto che non compaia scritta nelle equazioni del sistema significa che il suo coefficiente è zero in ognuna delle due equazioni del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema lineare troviamo la soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \quad \text{qualsiasi}, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

5. Risolvere il sistema lineare di due equazioni in quattro incognite

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Sol. Si tratta di un esercizio completamente analogo al precedente. La soluzione è

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2, \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

6. Risolvere i seguenti sistemi di quattro equazioni in tre incognite $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & +8x_3 & = 0 \\ -x_1 & +x_2 & -5x_3 & = 0 \\ 3x_1 & & +6x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 & -2x_2 & +8x_3 & = 1 \\ -x_1 & +x_2 & -5x_3 & = 0 \\ 3x_1 & & +6x_3 & = 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0. \end{cases}$$

Sol. Per quanto riguarda il primo sistema abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & 0 \\ -1 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -18 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -18 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il sistema è compatibile. Per risolvero facciamo un ulteriore passo con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ritraducendo questa matrice in un sistema lineare, troviamo

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 = 0 \\ \quad x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per quanto riguarda il secondo sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -18 & -3 \\ 0 & 5 & -15 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 6 & -18 & -3 \\ 0 & 5 & -15 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Il sistema è incompatibile.

7. Risolvere il seguente sistema di tre equazioni in quattro incognite $x, y, z, u \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ 3x + 2y - 5z = 1. \end{cases}$$

Sol. Osserviamo che la variabile u non compare esplicitamente nelle equazioni del sistema dato. Ne segue che il sistema ha soluzioni se e solo se ne ha il sistema in *tre* incognite

$$\begin{cases} x & +\,y & +z & = 1 \\ 2x & +y & -3z & = 0 \\ 3x & +2y & -5z & = 1. \end{cases}$$

Inoltre per ogni soluzione del sistema in tre incognite, is sistema in quattro incognite ha infinite soluzioni dipendenti da un parametro, in quanto il valore della quarta incognita può essere scelto arbitrariamente. Abbiamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & -5 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & -8 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

da cui,

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ u \quad \text{qualsiasi}, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ u = t \end{cases}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

8. Risolvere il seguente sistema di 3 equazioni in 5 incognite $x, y, z, u, v \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} x & +\,y & +z & = 1 \\ 2x & +y & -3z & = 0 \\ 3x & +2y & -5z & = 1. \end{cases}$$

Sol. L'esercizio è del tutto analogo al precedente. La soluzione è

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 0 \\ u = t_1 \\ v = t_2 \end{cases}, \qquad t_1, t_2 \in \mathbf{R}.$$

9. Trovare le soluzioni $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \in \mathbf{R}$ del sistema lineare la cui matrice completa è data da

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 11 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 18 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

Sol.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 11 & 7 & -1 \\ 3 & 6 & 3 & 18 & 9 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -3 & -15 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -3 & -15 \\ 0 & 12 & -6 & 6 & -6 & -30 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

che tradotta in un sistema lineare diventa

$$\begin{cases} y_1 + 2y_3 + 5y_4 + 4y_5 = 2 \\ y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4 - \frac{1}{2}y_5 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} y_1 = 2 - 2t_1 - 5t_2 - 4t_3 \\ y_2 = \frac{1}{2}(5 + t_1 - t_2 + t_3) \\ y_3 = t_1 \\ y_4 = t_2 \\ y_5 = t_3 \end{cases} , \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}\,.$$

10. Risolvere il sistema omogeneo associato alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol. Trattandosi di un sistema omogeneo, la colonna dei termini noti è costituita da zeri:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

I pivot sono nella prima e nella terza colonna. Ritraducendo questa matrice in un sistema lineare, troviamo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - 3x_4 + 2x_5 \\ x_3 = x_4 - x_5 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = -t_1 - 3t_2 + 2t_3 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 - t_3 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases} \quad , \quad t_1, t_2, t_3 \in \mathbf{R}\,.$$

11. Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$ risolvere il sistema lineare associato alla matrice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Sol. L'algoritmo di Gauss-Jordan si può applicare anche a sistemi i cui coefficienti dipendono da uno o più parametri.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \end{array}\right)$$

Se $\lambda \neq 1$, possiamo dividere per $\lambda - 1$ la seconda e la terza riga ottenendo

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/(\lambda-1) \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(\lambda-1) \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2\lambda/(\lambda-1) \\ 0 & 1 & 0 & -2/(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(\lambda-1) \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2(\lambda+1)/(\lambda-1) \\ 0 & 1 & 0 & -2/(\lambda-1) \\ 0 & 0 & 1 & -2/(\lambda-1) \end{array}\right)$$

ovvero

$$\begin{cases} x_1 = 2(\lambda+1)/(\lambda-1) \\ x_2 = -2/(\lambda-1) \\ x_3 = -2/(\lambda-1) \end{cases}$$

Per $\lambda = 1$, invece, la matrice del sistema diventa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

e il sistema è incompatibile.

12. Siano $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbf{R}$ una soluzione del sistema associato alla matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -88\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Calcolare la somma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Sol. Iniziamo con l'osservare che il sistema, avendo matrice dei coefficienti triangolare superiore, con tutti elementi diversi da zero sulla diagonale, ammette una soluzione (peraltro unica). Poiché la prima equazione del sitema è proprio

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -88\frac{1}{2}$$

la somma richiesta è $-88\frac{1}{2}$.