Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
SECONDA Prova di Esonero

Riportare in dettaglio lo svolgimento degli esercizi, motivando con chiarezza i passaggi svolti.

1) Si considerino la circonferenza S^1 di centro $(0,0)$ e raggio unitario (con topologia indotta da $\mathbf{R}^2$) e l'intervallo $J = [-1,1]$ chiuso e limitato della retta reale euclidea.

   Sullo spazio topologico prodotto $S^1 \times J$ si consideri la relazione di equivalenza $\sim$ data da (al variare di P e $Q \in S^1$, s e $t \in J$):

$$(P,t) \sim (Q,s) \;\Leftrightarrow\; \text{o} \;\; (P,t) = (Q,s) \;\; \text{oppure} \;\; s = t = -1 \;\; \text{oppure} \;\; s = t = 1$$

   Detto
$$Y := \frac{S^1 \times J}{\sim}$$
   lo spazio topologico quoziente rispetto alla relazione $\sim$, determinare un omemorfismo tra Y e la sfera euclidea
$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

2) Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico e siano $x, y \in X$ due suoi punti distinti. Sia $I = [0,1]$ l'intervallo chiuso e limitato della retta reale euclidea. Dimostrare che i cammini costanti $\epsilon_x : I \to X$ e $\epsilon_y : I \to X$, definiti rispettivamente da:
$$\epsilon_x(t) = x, \;\; \epsilon_y(t) = y, \;\; \forall\, t \in I,$$
   sono omotopi se, e solo se, i punti x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi di X.

3) Nello spazio topologico $\mathbf{R}^3$, dotato della topologia euclidea, si considerino i sottospazi
$$X := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$
   e
$$Y := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

   (3.i) Dimostrare che il sottospazio $Z := X \cup Y$ è connesso.

   (3.ii) Calcolare il gruppo fondamentale di Z con punto base $(0,0,0)$.

4) Siano X uno spazio topologico e A un sottospazio di X. Dimostrare che:

   (4.i) Il sottospazio A è retratto di X se e solo se ogni applicazione continua di dominio A si estende con continuità a tutto X.

   (4.i) Il sottospazio A è retratto di deformazione di X se e solo se ogni applicazione continua di dominio A si estende con continuità a X e tale estensione è unica a meno di omotopia relativa ad A.

Svolgimenti

1) *Si considerino la circonferenza* S^1 *di centro* $(0,0)$ *e raggio unitario (con topologia indotta da* $\mathbf{R}^2$*) e l'intervallo* $J = [-1,1]$ *chiuso e limitato della retta reale euclidea.*

   Sullo spazio topologico prodotto $S^1 \times J$ *si consideri la relazione di equivalenza* $\sim$ *data da (al variare di* P *e* $Q \in S^1$, s *e* $t \in J$*):*

$$(P,t) \sim (Q,s) \ \Leftrightarrow \ \text{o} \ \ (P,t) = (Q,s) \ \text{ oppure } \ s = t = -1 \ \text{ oppure } \ s = t = 1$$

   Detto

$$Y := \frac{S^1 \times J}{\sim}$$

   lo spazio topologico quoziente rispetto alla relazione $\sim$*, determinare un omemorfismo tra* Y *e la sfera euclidea*

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Svolgimento: Abbiamo visto a lezione e ad esercitazioni che $S^1 \times J$ è omeomorfo al cilindro (limitato)

$$\mathcal{C} := \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, \ -1 \le z \le 1\} \subset \mathbf{R}^3.$$

Utilizzando questo omeomorfismo, definiamo dunque un'applicazione

$$g : S^1 \times [-1,1] \cong \mathcal{C} \to \mathbf{R}^3$$

nel modo seguente:

$$g((x,y,z)) := (x\sqrt{1-z^2}, y\sqrt{1-z^2}, z), \ \ \forall \ \ (x,y,z) \in S^1 \times [-1,1] \cong \mathcal{C}.$$

Notiamo che l'applicazione g è continua, poiché lo sono le sue componenti. Inoltre $Im(g) \subseteq S^2$, infatti per ogni $(x,y,z) \in S^1 \times [-1,1] \cong \mathcal{C}$ si ha:

$$||g(x,y,z)||^2 = x^2(1-z^2) + y^2(1-z^2) + z^2 = (1-z^2)(x^2+y^2) + z^2 = 1 - z^2 + z^2 = 1$$

e g è suriettiva perché $(0,0,1) = g(1,0,1)$, $(0,0,-1) = g(1,0,-1)$, $(x,y,z) = g(\frac{x}{\sqrt{1-z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-z^2}}, z)$ per $z \in (-1,1)$.

Usando l'omeomorfismo di $S^1 \times J$ con il cilindro $\mathcal{C}$ otteniamo che

$$Y = \{[(1,0,1)], [(1,0,-1]\} \cup \{[(x,y,z)] | z \in (-1,1)\}$$

dove

$$[(1,0,1)] := \{(x,y,1) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \ \ [(1,0,-1]] := \{(x,y,-1) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

mentre, se $z \in (-1,1)$ e $x^2+y^2 = 1$, ciascuna classe di equivalenza $[(x,y,z)] = \{(x,y,z)\}$ consiste soltanto di un punto.

Denotando con $\pi : S^1 \times J \to Y$ la proiezione canonica, si può verificare agilmente che g è costante sulle fibre di π (infatti, tutti i punti della classe di equivalenza $[(1,0,1)]$ hanno la stessa immagine $(0,0,1)$, mentre tutti i punti della classe di equivalenza $[(1,0,-1)]$ hanno immagine $(0,0,-1)$). Pertanto, per la proprietà universale della topologia quoziente, esiste un'applicazione continua $\overline{g} : Y \to S^2$, definita da

$$\overline{g}([(x,y,z)]) := g(x,y,z)$$

cioè tale che $g = \overline{g} \circ \pi$.

L'applicazione $\overline{g} : Y \to S^2$ è suriettiva perché ha la stessa immagine di g, che è suriettiva. Inoltre, $\overline{g}$ è iniettiva perchè, per ogni (P,t) e (Q,s) di $S^1 \times J$, si ha che $g((P,t)) = g((Q,s))$ se e solo se $(P,t) \sim (Q,s)$; infatti, analizzando i tre casi differenti $[(1,0,1)]$, $[(1,0,-1]]$, $[(x,y,z)]$, con $z \in (-1,1)$ e $x^2+y^2=1$, si vede che g non è iniettiva solo sui punti con $\sqrt{1-z^2}=0$, e su questi punti l'immagine è già stata discussa in precedenza. Per concludere l'esercizio (cioè dedurre che $\overline{g}$ è un omeomorfismo e dunque che Y è omeomorfo a S^2) utilizziamo il **Teorema dei modelli** notando che $S^1 \times J$ (e dunque Y) è compatto perché prodotto di compatti mentre S^2 è di Hausdorff, visto che è sottospazio di $\mathbf{R}^3$.

2) *Sia $(X, \mathcal{U}_X)$ uno spazio topologico e siano $x, y \in X$ due suoi punti distinti. Sia $I = [0,1]$ l'intervallo chiuso e limitato della retta reale euclidea. Dimostrare che i cammini costanti $\epsilon_x : I \to X$ e $\epsilon_x : I \to X$, definiti rispettivamente da:*

$$\epsilon_x(t) = x, \;\; \epsilon_y(t) = y, \;\; \forall\, t \in I,$$

sono omotopi se, e solo se, i punti x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi di X.

Svolgimento: Supponiamo che ϵ_x e ϵ_y siano cammini omotopi. Allora, per definizione di omotopia tra due applicazioni continue, esiste una funzione continua

$$F : I \times I \to X$$

tale che per ogni $t \in I$ si ha:

$$F(t,0) = \epsilon_x(t) = x \text{ e } F(t,1) = \epsilon_y(t) = y.$$

In particolare vale $F(0,0) = x$ e $F(0,1) = y$.

Sia $i : I \hookrightarrow I \times I$ l'inclusione

$$i(s) := (0,s).$$

Allora $\gamma := F \circ i$, essendo composizione di funzioni continue, è un arco. Inoltre

$$\gamma(0) = F(0,0) = x, \;\; \gamma(1) = F(0,1) = y,$$

quindi x e y appartengono alla stessa componente connessa per archi di X.

Viceversa, supponiamo che x e y appartengano alla stessa componente connessa per archi di X; denotiamo con $C_{x,y}$ tale componente. Allora, per definizione di componente connessa per archi, esiste un arco $\gamma : I \to C_{x,y}$ tale che

$$\gamma(t) \in C_{x,y}, \; \forall\, t \in I, \;\; \gamma(0) = x, \; \gamma(1) = y.$$

Si consideri la proiezione $\pi_2 : I \times I \to I$ sul secondo fattore del prodotto e si definisca

$$F := \gamma \circ \pi_2 : I \times I \to C_{x,y} \subseteq X.$$

La funzione F così definita è una funzione continua da $I \times I$ a X, ha per immagine il sostegno di γ e, per ogni $t \in I$,

$$F(t,0) = \gamma(0) = x, \; F(t,1) = \gamma(1) = y,$$

quindi F è una omotopia tra ϵ_x e ϵ_y.

3) *Nello spazio topologico* $\mathbf{R}^3$*, dotato della topologia euclidea, si considerino i sottospazi*

$$X := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

e

$$Y := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

(3.i) Dimostrare che il sottospazio $Z := X \cup Y$ *è connesso.*

(3.ii) Calcolare il gruppo fondamentale di Z *con punto base* $(0, 0, 0)$*.*

Svolgimento: (3.i) Notare che X e Y sono due sfere S^2 di raggio 1 e di centro, rispettivamente, $(1, 0, 0)$ e $(-1, 0, 0)$, e sono semplicemente connessi (come visto a lezione). Esse sono tangenti nell'origine $(0, 0, 0)$; dunque Z è un **bouquet di due sfere** S^2. Il sottospazio Z è connesso (e connesso per archi) perché è unione di due sottospazi connessi per archi che si intersecano propriamente.

(3.ii) Il sottospazio Z è connesso per archi per quanto visto al punto precedente. Si considerino i due aperti di Z:

$$Z_1 := Z \setminus \{(2, 0, 0)\} \;\text{ e }\; Z_2 := Z \setminus \{(-2, 0, 0)\}.$$

Notiamo che Z_1 è semplicemente connesso, dato che è omotopicamente equivalente a Y: infatti, $Z_1 = Y \vee (X \setminus \{(2, 0, 0)\})$ (quozientando per il punto comune $(0, 0, 0)$): ma, $X \setminus \{(2, 0, 0)\}$ è contraibile nel punto $(0, 0, 0)$ perchè omeomorfo a $\mathbf{R}^2$ tramite la proiezione stereografica. Analogamente Z_2 è semplicemente connesso, perchè omotopicamente equivalente a X. Inoltre

$$Z_1 \cap Z_2 = Z \setminus \{(2, 0, 0), (-2, 0, 0)\}$$

è connesso per archi perché $X \setminus \{(2, 0, 0)$ e $Y \setminus \{(-2, 0, 0)$ lo sono (e hanno intersezione non vuota). Per il teorema di Seifert-Van Kampen, allora, Z è semplicemente connesso, quindi $\pi_1(Z, (0, 0, 0)) = \{1\}$.

4) *Siano* X *uno spazio topologico e* A *un sottospazio di* X*. Dimostrare che:*

(4.i) Il sottospazio A *è retratto di* X *se e solo se ogni applicazione continua di dominio* A *si estende con continuità a tutto* X*.*

(4.i) Il sottospazio A *è retratto di deformazione di* X *se e solo se ogni applicazione continua di dominio* A *si estende con continuità a* X *e tale estensione è unica a meno di omotopia relativa ad* A*.*

Svolgimento: Indichiamo con $I = [0, 1]$ è l'intervallo unitario euclideo. Inoltre, indichiamo con $\iota : A \to X$ l'inclusione di A in X, che è continua perché A è un sottospazio topologico di X.

(4.i) Supponiamo che A sia retratto di X e indichiamo con $r : X \to A$ una retrazione. Per definizione di retrazione, l'applicazione r è continua e la composizione $r \circ \iota$ è l'identità di A. Comunque assegnata una applicazione continua $g : A \to Y$ (con Y spazio topologico), la composizione $g \circ r$ è l'estensione cercata.

Viceversa, supponiamo che ogni applicazione continua di dominio A si estenda con continuità a tutto X. Posto r una estensione dell'identità di A, si verifica che r è una retrazione di X su A.

(4.ii) Supponiamo che A sia retratto di deformazione X; indichiamo con $r : X \to A$ una retrazione di deformazione (cioè $\iota \circ r$ è omotopa all'identità id_X di X relativamente ad A, in simboli $id_X \cong_{relA} \iota \circ r$) e con $H : X \times I \to X$ una specifica omotopia relativa tra $\iota \circ r$ e id_X (cioè H è un applicazione continua con $H(x, 0) = \iota(r(x))$, $H(x, 1) = id_X(x) = x$, $H(a, t) = a$ per ogni $x \in X$, $a \in A$, $t \in I$).

Sia assegnata una applicazione continua $g : A \to Y$ (con Y spazio topologico). Per quanto visto al punto (4.i), l'applicazione g si estende con continuità a tutto X. Siano $g_0, g_1 : X \to Y$ due estensioni di g. Allora, $g_0 \cong_{relA} (g_0 \circ id_X)$ e, poiché $id_X \cong_{relA} \iota \circ r$ e $g_0 \circ \iota = g$, ricaviamo $g_0 \cong_{relA} (g_0 \circ \iota \circ r) \cong_{relA} (g \circ r)$. Analogamente, anche $g_1 \cong_{relA} (g_1 \circ \iota \circ r) \cong_{relA} (g \circ r)$. Per transitività, concludiamo che $g_0 \cong_{relA} g_1$.

Viceversa, supponiamo che ogni applicazione continua di dominio A si estenda con continuità a tutto X in modo unico a meno di omotopia relativamente ad A. Sia $r : X \to A$ una estensione dell'identità $id_A : A \to A$; per il punto (4.i), l'applicazione r è una retrazione del sottospazio X su A. Osservando che sia $\iota \circ r$ che id_X sono estensioni ad X di ι, per ipotesi deve avere che $\iota \circ r \cong_{relA} id_X$, e dunque r è una retrazione per deformazione.