Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata"
Esercizi GEOMETRIA I Modulo (STM)
POLINOMI. NUMERI COMPLESSI
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Sia $V := \mathbb{R}[X]_{\leqslant 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi in un'indeterminata, a coefficienti reali e di grado al piu' due. Sia D l'applicazione lineare di DERIVAZIONE definita da

$$D(P(x)) = P'(x)$$

dove

$$P(x) = a_0 + a_1x_+a_2x^2 + a_3x^3,\ P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$$

in altri termini $P'(x)$ e' l'usuale derivata di $P(x)$. Sia $W \subset V$ il sottoinsieme definito da

$$W := \{D(P(x))(0) = P'(0) = 0\}.$$

(i) Verificare che W e' un sottospazio
(ii) Calcolare la dimensione di W.
Svolgimento. (i) Notare che $P'(0) = 0$ significa semplicemente $a_1 = 0$. Presi pertanto $P_1, P_2 \in W$ qualsiasi e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qualsiasi, chiaramente il coefficiente della x del polinomio $\lambda P_1(x) + \mu P_2(x)$ e' nullo, quindi $\lambda P_1(x) + \mu P_2(x) \in W$, i.e. W e' sottospazio di V

(ii) Una base di W e' data ad esempio da $\{1, x^2, x^3\}$ quindi W e' di dimensione 3, cioe' e' un iperpiano di V.

Esercizio 2. Consideriamo $\mathbb{R}[x]$ come anello commutativo unitario euclideo. Presi $D(x) = x^5 + x^3 + x^2 - 17x + 3$ e $d(x) = x^2 + 5$ in $\mathbb{R}[x]$.
(i) Determinare grado e coefficiente direttore di $D(x)d(x)$
(ii) Svolgere l'algoritmo di divisione euclidea di $D(x)$ rispetto a $d(x)$, determinando esplicitamente il quoziente $Q(x)$ ed il resto $R(x)$.

Svolgimento. (i) Ovviamente $\deg(D(x)d(x)) = \deg(D(x) + \deg(d(x)) = 7$. Il coefficiente direttore si ottiene moltiplicando il coefficiente direttore di $D(x)$ per quello di $d(x)$, in altre parole $D(x)d(x)$ e' monico.

(ii) Svolgendo la divisione eulcidea come spiegata a lezione si ottiene

$$D(x) = d(x) \cdot (x^3 - 4x + 1) + 3x - 2$$

in altri termini

$$Q(x) = x^3 - 4x + 1, \ R(x) = 3x - 2.$$

Esercizio 3. Per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta reale il numero complesso $\frac{x-2+ix}{x-3-5i} \in \mathbb{C}$.
Svolgimento. Si ha

$$\frac{x-2+ix}{x-3-5i} = \frac{x-2+ix}{x-3-5i} \cdot \frac{x-3+5i}{x-3+5i} = \frac{(x-2+ix)x-3+5i}{(x-3)^2+25} =$$

$$= \frac{(x^2-10x+6)+i(x^2+2x-10)}{x^2-6x+34}.$$

Cerchiamo quegli $x \in \mathbb{R}$ per cui $x^2+2x-10 = 0$ cioe' $x = -1 \pm \sqrt{11}$, che sono valori che non annullano il denominatore della precedente frazione.

Esercizio 4. Dati $3+2i, \ i, \ -2i \in \mathbb{C}$, calcolare i loro inversi moltiplicativi.
Svolgimento. Sia $z = i$; poiche' $i^2 = -1$ ne segue che $i^{-1} = -i$.
Sia ora $z = -2i$; dal conto precedente e' chiato che $(-2i)^{-1} = \frac{i}{2}$.
Sia infine $z = 3+2i$. Come spiegato a lezione $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{||z||}$. In questo caso

$$||z|| = 9 + 4 = 13 \ \text{ e } \ \overline{z} = 3 - 2i.$$

Pertanto

$$z^{-1} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i.$$

Esercizio 5. Scrivere in forma polare il numero complesso $z = -1 - i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.
Svolgimento. Abbiamo

$$\rho := \sqrt{||z||} = \sqrt{1+3} = 2.$$

Ora le due condizioni in simultanea

$$-1 = 2\cos(\theta) \quad ed \quad -\sqrt{3} = 2\sin(\theta)$$

ci dicono che

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2},\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ \theta = \frac{4}{3}\pi.$$

Pertanto

$$z = 2\left(\cos(\frac{4}{3}\pi) + i\sin(\frac{4}{3}\pi)\right).$$

Esercizio 6. Determinare $(1+i)^{11} \in \mathbb{C}$.
Svolgimento. Dapprima cerchiamo la rappresentazione polare di $z = 1+i$. Per esso si trova semplicemente $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$; quindi

$$z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})\right).$$

Per calolare z^{11} utilizziamo le formule di De Moivre, i.e.

$$z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left(\cos(\frac{11\pi}{4}) + i\sin(\frac{11\pi}{4})\right)$$

che si scrive anche

$$z^{11} = 2^5\sqrt{2}\left(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})\right).$$

Esercizio 7. Determinare tutti i $w \in \mathbb{C}$ per cui $w^3 = i$.
Svolgimento. Sia $z = i$. La sua rappresentazione polare e' data da $\rho = 1$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$, i.e.

$$z = i = 1\left(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})\right).$$

Sia ora $w := \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \in \mathbb{C}$. Per le formule di De Moivre, dire $w^3 = z$ e' equivalente a

$$\rho^3 = 1 \quad e \quad 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ 0 \leqslant k \leqslant 2.$$

Pertanto otteniamo i 3 numeri complessi

$$w_0 = 1\left(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})\right),$$
$$w_1 = 1\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})\right),$$
$$w_2 = 1\left(\cos(\frac{9\pi}{6}) + i\sin(\frac{9\pi}{6})\right).$$

Esercizio 8. Determinare tutte le radici cubiche di -1.

Svolgimento. Come nell'esercizio precedente, sia $z = -1$; la sua rappresentazione polare e' data da $\rho = 1$ e $\theta = \pi$, i.e.

$$z = i = 1\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right).$$

Sia $w := \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \in \mathbb{C}$. Per le formule di De Moivre, dire $w^3 = -1$ e' equivalente a

$$\rho^3 = 1 \quad e \quad 3\theta = \pi + 2k\pi,\ 0 \leqslant k \leqslant 2.$$

Pertanto otteniamo i 3 numeri complessi

$$w_0 = 1\left(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3})\right),$$
$$w_1 = 1(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1,$$
$$w_2 = 1\left(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{3})\right).$$