1. Sia data l'applicazione lineare $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, $F(X) = A \cdot X$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Far vedere che i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= \mathbf{e}_1, \end{aligned}$$

formano una base per $\mathbf{R}^3$.

(ii) Calcolare la matrice di F rispetto alla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ in dominio e codominio.

Sol. (i) Le coordinate dei vettori $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ rispetto alla base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ sono

$$\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per dimostrare che $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$ basta mostrare che la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango tre, il che si verifica facilmente mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan.

(ii) Chiamiamo $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ e consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & & \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

Se $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla bace canonica $\mathcal{C}$ (quello facile da scrivere), la matrice cercata $\tilde{A}$ è data da

$$\tilde{A} = C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} A C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1} A C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

vettori in $\mathbf{R}^3$.

(i) Far vedere che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano una base per $\mathbf{R}^3$.

Sia $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione che permuta i vettori $\mathbf{v}_i$.

$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2, \quad A(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3, \quad A(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1.$$

(ii) Calcolare la matrice di A rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

(iii) Calcolare la matrice di A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

(iv) Calcolare la matrice di A^3 rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Sol. (i) Basta mostrare che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ha rango tre, il che si vede facilmente utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan.

(ii) Si tratta della matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3, \mathcal{C} & \xrightarrow{A=?} & \mathbf{R}^3, \mathcal{C} \\ \downarrow C_{\mathcal{C},\mathcal{B}} & & \uparrow C_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \\ \mathbf{R}^3, \mathcal{B} & \xrightarrow{\widetilde{A}} & \mathbf{R}^3, \mathcal{B} \end{array}$$

dove $\mathcal{B}$ indica la base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Se $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ è la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, la matrice cercata A è data da

$$A = B\tilde{A}B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

(iv) Si ha

$$(B\tilde{A}B^{-1})^3 = B\tilde{A}B^{-1}B\tilde{A}B^{-1}B\tilde{A}B^{-1} = B\tilde{A}^3B^{-1}$$

Ma

$$\tilde{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$(B\tilde{A}B^{-1})^3 = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} B^{-1} = BB^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinare la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ e la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica e $\mathcal{B}$ è data di volta in volta da

$$\mathcal{B}=\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\},\quad \mathcal{B}=\{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\},\quad \mathcal{B}=\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\}.$$

Sol. Per i cambiamenti di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ si tratta delle matrici

$$\begin{pmatrix}1&3\\-2&-1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&3\\-1&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

Per i cambiamenti di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ si tratta delle loro inverse, vale a dire

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1&-3\\2&1\end{pmatrix};\quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&0\\1&-1\end{pmatrix}$$

4. Determinare la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e la matrice del cambiamento di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, dove $\mathcal{C}$ è la base canonica e $\mathcal{B}$ è data di volta in volta da

$$\mathcal{B}=\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\},\ \mathcal{B}=\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\},\ \mathcal{B}=\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\}.$$

Sol. Per i cambiamenti di base $C_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ si tratta delle matrici

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&-1&1\\0&2&1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}0&3&0\\-1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Per i cambiamenti di base $C_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ si tratta delle loro inverse, vale a dire

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-1&-2\\-2&-1&3\\4&2&-1\end{pmatrix};\quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&-3&0\\1&0&0\\0&3&3\end{pmatrix};\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&2&0\\1&-1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

5. Sia

$$V=\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in \mathbf{R}^3 : x_1+x_2+x_3=0\}$$

e sia $A:\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_3\\x_1\\x_2\end{pmatrix}$.

(i) Dimostrare che $A(\mathbf{x})\in V$ per ogni $\mathbf{x}\in V$.

Sia $A_{|V}$ l'applicazione A *ristretta* a V.

(ii) Trovare una base per V.

(iii) Calcolare la matrice rappresentativa della applicazione $A_{|V}$ rispetto a questa base.

Sol. (i) Basta dimostrare che $A(\mathcal{B}) \subseteq V$, dove $\mathcal{B}$ è una qualunque base di V. Dall'equazione $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ricaviamo che i vettori di V sono tutti e soli i vettori di $\mathbf{R}^3$ della forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo che una base di V è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcoliamo $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, che appartiene a V in quanto le sue coordinate soddisfano l'equazione che definisce il sottospazio V. In modo analogo si osserva che $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio V.

(ii) Abbiamo già risolto questo problema al punto (i).

(iii) Si ha

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice che rappresenta $A|_V$ nella base $\mathcal{B}$ è la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Sia $V \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio dato da

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \end{cases} \right\}$$

sia $F : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare $X \mapsto AX$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Dimostrare che se $\mathbf{x} \in V$, allora $F(\mathbf{x}) \in V$.

(ii) Determinare una base per V e calcolare la matrice rappresentativa dell' applicazione F ristretta a V

$$F_{|V} : V \longrightarrow V$$

rispetto a questa base.

(iii) Calcolare il nucleo e l'immagine della applicazione $F_{|V}$.

Sol. (i) Basta dimostrare che $A(\mathcal{B}) \subseteq V$, dove $\mathcal{B}$ è una qualunque base di V. Dalle equazioni che definiscono V si ricava facilmente che una base di V è

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcoliamo $F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, che appartiene a V in quanto le sue coordinate soddisfano l'equazione che definisce il sottospazio V. Il vettore $F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene chiaramente al sottospazio V.

(ii) Si ha

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque la matrice che rappresenta $F|_V$ nella base $\mathcal{B}$ è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) Il generico vettore di V si scrive come

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il nucleo di $F|_V$ è caratterizzato dall'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ovvero $\alpha = 0$ e β qualsiasi. Ne segue che

$$\ker F|_V = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

In termini delle coordinate $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, l'immagine di $F|_V$ è data da

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Dunque

$$\mathrm{Im}F|_V=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbf{R}^4$$

7. Sia A la matrice $n\times n$ data da

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

   (i) Sia $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n$ la base standard di $\mathbf{R}^n$. Far vedere che

$$\begin{aligned}&Ae_1=0,\\&Ae_i=e_{i-1},\qquad\text{per ogni } i>1.\end{aligned}$$

   (ii) Calcolare A^2.
   (iii) Per ogni $n>0$ calcolare A^n e determinarne il nucleo e l'immagine.

Sol. (i) E' immediato dalla definizione di matrice associata ad un'applicazione linerae rispetto ad una coppia di basi.
(ii) Si ha

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\cdots&0\\0&0&0&1&0\cdots&0\\0&0&0&0&1\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&0\cdots&1\\0&0&0&0&0\cdots&0\\0&0&0&0&0\cdots&0\end{pmatrix}.$$

(iii) Si vede facilmente che $A^n=0$ dunque $\ker A^n=\mathbf{R}^n$ e $\mathrm{Im}A^n=\{0\}$.

8. Sia $M(2,2,\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici reali 2×2. Sia

$$F\colon M(2,2,\mathbf{R})\longrightarrow M(2,2,\mathbf{R}),\quad M\mapsto {}^tM$$

   l'applicazione che associa ad una matrice la sua trasposta.
   (i) Far vedere che F è lineare.
   (ii) Scegliere una base in $M(2,2,\mathbf{R})$ e determinare la matrice rappresentativa di F rispetto a quella base in dominio e codominio.

Sol. (i) Per definizione di trasposta,

$$F\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Pertanto, se $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ e $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, allora

$$F(A_1 + A_2) = F\begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = F(A_1) + F(A_2)$$

In modo analogo si vede che

$$F(\lambda \cdot A) = F\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda c \\ \lambda b & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \lambda F(A)$$

Dunque F è un'applicazione lineare.
(ii) Scegliamo come base la base canonica di $M(2, 2\mathbf{R})$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Rispetto a questa base, l'applicazione F è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Sia $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Dire se $\mathbf{x}$ è autovettore di A. Se si, dire per quale autovalore.

Sol. Si ha $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 29 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 29 \end{pmatrix}$ non è della forma $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ non è un autovettore di A.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ e sia $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dire se $\mathbf{x}$ è autovettore di A. Se si, dire per quale autovalore.

Sol. Si ha $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}$ non è della forma $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, dunque $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ non è un autovettore di$A$.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$. determinare quali dei seguenti vettori sono autovettori di A:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 18 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Far vedere che 7 è autovalore di A e determinare l'autospazio corrispondente.

Sol. Si ha $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ è un autovettore di$A$, di autovalore -4.

$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$ non è della forma $\lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, dunque $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ non è un autovettore di$A$.

$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di$A$, di autovalore 7.

Si ha $\begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$. Poiché $\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A, lo è anche $\begin{pmatrix} 12 \\ -10 \end{pmatrix}$ (con lo stesso autovalore). Infine $\begin{pmatrix} 18 \\ -15 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ e dunque anche $\begin{pmatrix} 18 \\ -15 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A.

Abbiamo già scopreto che 7 è un autovalore di A in quanto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di autovalore 7.

Un altro modo di dimostrare che 7 è un autovalore di A è calcolare $\det(A-7\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$.

Il 7-autospazio di A è $\ker(A - 7\mathrm{Id})$. Per determinarlo dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} -6x + 6y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ e dunque il 7-autospazio di A è span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4. Senza calcoli trovare un autovalore di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Sol. La matrice A ha due righe uguali, dunque $\det A = 0$. Ma allora $\det(A - 0 \cdot \mathrm{Id}) = 0$, ovvero $\lambda = 0$ è un autovalore di A.

5. Senza calcoli trovare un autovalore λ di $A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ e due autovettori linearmente indipendenti in V_λ.

Sol. La matrice A ha due righe uguali, dunque $\det A = 0$. Ma allora $\det(A - 0 \cdot \mathrm{Id}) = 0$, ovvero $\lambda = 0$ è un autovalore di A. Per determinare V_0 dobbiamo rosolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 5x + 5y + 5z = 0 \\ 5x + 5y + 5z = 0 \\ 5x + 5y + 5z = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$. Due autovettori linearmente indipendenti in V_0 sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Sia A una matrice e sia $\mathbf{x}$ un autovettore di A di autovalore λ. Calcolare $A^2\mathbf{x}$, $A^3\mathbf{x}$, $A^n\mathbf{x}$.

Sol. Per definizione di autovettore di autovalore λ, si ha $A\mathbf{x} = -\lambda\mathbf{x}$, da cui $A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$. Allo stesso modo $A^3\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$ e $A^n\mathbf{x} = \lambda^n\mathbf{x}$.

7. Data $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dire se $\lambda = 5$ è autovalore di A.

Sol. Calcoliamo

$$\det(A - 5\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} = -4 - 16 = -20 \neq 0$$

Dunque $\lambda = 5$ non è un autovalore di A.

8. Calcolare i polinomi caratteristici delle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol. Si ha

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= ((1-\lambda)^2 - 1) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = ((1-\lambda)^2 - 1)^2 = \lambda^2(\lambda - 2)^2$$

9. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autovettori corrispondenti. Dire quali matrici sono diagonalizzabili.

(i)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iii)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(iv)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Sol. (i) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3.$$

La matrice ha pertanto l'unico autovalore $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 3. La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è

$$\dim(V_1) = \dim\ker \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è minore della sua molteplicità algebrica: la matrice non è diagonalizzabile. Gli 1-autovettori si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

dunque una base per V_1 è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 5 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4$$

La matrice non ha autovalori reali: non è diagonalizzabile. Ovviamente, non essendoci autovalori reali non ci sono neppure autovettori.

(iii) Si ha

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda).$$

La matrice ha pertanto due autovalori: l'autovalore $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore $\lambda = 3$, con molteplicità algebrica 1. La molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 3$ è necessariamente uguale alla sua molteplicità algebrica in quanto per ogni autovalore vale

$$1 \leq \text{molteplicità geometrica}(\lambda) \leq \text{molteplicità algebrica}(\lambda)$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è invece

$$\dim(V_1) = \dim\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

Anche la molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è uguale alla sua molteplicità algebrica: la matrice è diagonalizzabile. I 3-autovettori sono gli elementi di

$$\ker\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \ker \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ottengono pertanto risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -2x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

da cui si vede facilmente che una base per V_3 è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Analogamente, gli 1-autovettori si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} -z = 0 \\ 0 = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

dunque una base per V_1 è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

10. Dire quale delle seguenti matrici è diagonalizzabile, spiegando perché:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Sol. Si tratta in tutti i casi di matrici triangolari, dunque i loro autovalori sono semplicemente gli elementi sulla diagonale. Ne segue che le matrici A, C e D, avendo 3 autovalori distinti, sono diagonalizzabili (la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale ad uno, e dunque coincide necessariamente con la sua molteplicità geometrica, vedi l'esercizio precedente). La matrice B ha invece un autovalore di molteplicità algebrica 2 (si tratta dell'autovalore 3). Per stabilire se B è diagonalizzabile o meno dobbiamo pertanto determinare la molteplicità geometrica dell'autovalore 3. Si ha

$$\begin{aligned} \dim V_3 = \dim \ker \left(\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) &= \dim \ker \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 - \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \end{aligned}$$

La molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 3$ è pertanto minore della sua molteplicità algebrica: la matrice B non è diagonalizzabile.

11. Calcolare il polinomio caratteristico della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sol. Il rango della matrice M è uno; dunque $\lambda = 0$ è autovalore dell'applicazione lineare L_M e la dimensione dell'autospazio $V_0 = \ker L_M$ è 4. Pertanto la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è almeno 4. Dal fatto che la matrice ha ordine 5 dispari, anche il quinto autovalore è reale e coincide con la traccia di M. Dunque il polinomio caratteristico di M è dato da

$$P_\lambda(M) = \lambda^4(\lambda - 20).$$

12. Sia A la matrice 6×6

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Far vedere che $\lambda = 2$ è autovalore di A. Determinare la dimensione dell'autospazio corrispondente.

(ii) Determinare il polinomio caratteristico di A.

Sol. (i) Si ha

$$\det(A - 2\mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

dunque $\lambda = 2$ è un autovalore di A. L'autospazio corrispondente è determinato dall'unica equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$ (ripetuta sei volte) ha pertanto dimensione $6 - 1 = 5$.

(ii) La molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 2$ è almeno 5. Il sesto autovalore è necessariamente reale ed è dato da

$$\mathrm{traccia}(M) - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8.$$

Dunque il polinomio caratteristico di A è dato da

$$P_\lambda(A) = (\lambda - 2)^5(\lambda - 8).$$

13. Determinare se le seguenti matrici sono coniugate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sol. Due matrici sono simili se e solo se hanno identici polinomi caratteristici e per ogni autovalore λ, la molteplicità geometrica di λ relativamente alla prima matrice coincide col la sua molteplicità geometrica relativamente alla seconda matrice. In questo caso si ha

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Dunque $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$. Per quanto riguarda l'autovalore $\lambda = 2$, questo ha molteplicità geometrica 1 sia per A che per B. Per quanto riguarda l'autovalore $\lambda = 1$ abbiamo

$$\dim\ker(A - \mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\dim\ker(B - \mathrm{Id}) = \dim\ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 - \mathrm{rango} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Dunque A e B non sono coniugate. In particolare, A è diagonalizzabile, mentre B non lo è.

14. Determinare se le seguenti coppie di matrici sono coniugate:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol. Per quanto riguarda la prima coppia di matrici, si ha

$$P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda + 3$$

$$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 3$$

Dunque $P_A(\lambda) \neq P_B(\lambda)$: le matrici A e B non sonoconiugate.

Per quanto riguarda la seconda coppia di matrici, si può osservare che l'unica matrice simile alla matrice identità è la matrice identità stessa (dimostrarlo). Altrimenti si può osservare che $P_A(\lambda) = (1-\lambda)^2 = P_B(\lambda)$, ma che l'autovalore 1 ha molteplicità geometrica uguale ad 1 relativamente ad A ed uguale a 2 relativamente a B.

15. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche calcolare gli autovalori e una base di autovettori:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

Sol.

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 9-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda - 10)$$

Ne segue che gli autovalori di A sono $\{5, 10\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_5 = \ker(A - 5\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{10} = \ker(A - 10\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A è

$$\mathcal{B}_A = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Per la seconda matrice si ha:

$$\det(B - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & -13 \\ -13 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda + 8)(\lambda - 18)$$

Ne segue che gli autovalori di B sono $\{-8, 18\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_{-8} = \ker(B + 8\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 13 & -13 \\ -13 & 13 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{18} = \ker(B - 18\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -13 & -13 \\ -13 & -13 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di B è

$$\mathcal{B}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per la terza matrice si ha:

$$\det(C - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{3}{2})$$

Ne segue che gli autovalori di C sono $\{1/2, 3/2\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_{1/2} = \ker(C - \frac{1}{2}\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{3/2} = \ker(C - \frac{3}{2}\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di C è

$$\mathcal{B}_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per la quarta matrice si ha:

$$\det(D - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -2 \\ -2 & 5/3-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{23}{3})$$

Ne segue che gli autovalori di D sono $\{1, 23/3\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_1 = \ker(D - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2/3 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{23/3} = \ker(D - \frac{23}{3}\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -2/3 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di D è

$$\mathcal{B}_D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

16. Per ognuna delle seguenti matrici simmetriche calcolare gli autovalori e una base di autovettori:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.

$$\det(A-\lambda\mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 3\det\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-3) - 9(1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+4)$$

Ne segue che gli autovalori di A sono $\{1, 3, -4\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_1 = \ker(A-\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3y = 0 \\ 3x-3y-z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_1.

$$V_3 = \ker(A-3\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} -2x+3y = 0 \\ 3x-5y-z = 0 \\ -y-2z = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_3.

$$V_{-4} = \ker(A+4\mathrm{Id}) = \ker\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} 5x+3y = 0 \\ 3x+2y-z = 0 \\ -y+5z = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_{-4}. Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A è

$$\mathcal{B}_A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Per la matrice B si porocede in modo del tutto analogo:

$$\det(B - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -3 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} + (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -9(1-\lambda) + (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 15) = (1-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+4)$$

Ne segue che gli autovalori di B sono $\{1, 6, -4\}$. Per determinare una base di autovettori basta determinare una base per ogni autospazio.

$$V_1 = \ker(B - \mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} 3y + 4z = 0 \\ 3x = 0 \\ 4x = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_1.

$$V_6 = \ker(B - 6\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 3 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} -5x + 3y + 4z = 0 \\ 3x - 5y = 0 \\ 4x - 5z = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_6.

$$V_{-4} = \ker(B + 4\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

La soluzione del sistema

$$\begin{cases} 5x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 5y = 0 \\ 4x + 5z = 0 \end{cases}$$

è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Il vettore $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ è pertanto una base di V_{-4}. Riassumendo, una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di B è

$$\mathcal{B}_B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

17. Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100}.

Sol. Osserviamo innanzi tutto che A è diagonalizzabile, avendo due autovalori distinti (infatti A è una matrice triangolare e dunque i suoi autovalori sono gli elementi che si trovano sulla diagonale). Per detrerminaare una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A dobbiamo fornire una base per ogni autospazio. Si ha:

$$V_2 = \ker(A - 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$V_{-2} = \ker(A + 2\mathrm{Id}) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\}$$

Indichiamo con $\mathcal{B}$ la base di $\mathbf{R}^2$ data da $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}. \right\}$ Se indichiamo con φ l'applicazione lineare rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica, quanto ottenuto finora significa che la matrice che rappresenta l'applicazione lineare φ rispetto alla base $\mathcal{B}$ (sia in partenza che in arrivo) è la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dunque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$$

da cui

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} D^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 2^{100} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(tanto per non lasciarvi la curiosità, $2^{100} = 1267650600228229401496703205376$).