1. Sia $F\colon \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da
$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (i) Calcolare e disegnare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (ii) Cosa fa geometricamente F?
   (iii) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$.

Sol. (i) Poiché per definizione $F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, si ha
$F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(ii) Geometricamente F è la riflessione rispetto all'asse x_2.
(iii) Per linearità, $F(span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\}) = span\{F(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix})\} = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}\}$. In altre parole, la retta per l'origine generata dal vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ viene mandata da F nella retta per l'origine generata dal vettore $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

2. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da
$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (i) Calcolare e disegnare $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.
   (ii) Cosa fa geometricamente F?
   (iii) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.
   (iv) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.
   (v) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.
   (vi) Calcolare e disegnare $F(U)$, dove $U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Confrontare le dimensioni $\dim U$ e $\dim F(U)$.

Sol. (i) Dalla definizione

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui
$F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Geometricamente F proietta un vettore sula piano $x_3 = 0$ e poi lo riflette rispetto all'asse x_2.

(iii) $F(U) = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$; $\dim U = \dim F(U) = 1$.

(iv) $F(U) = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix},\}$; $\dim U = \dim F(U) = 1$.

(v) $F(U) = span\{\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$; $\dim U = 2$, $\dim F(U) = 1$.

(vi) $F(U) = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\}$; $\dim U = 2$, $\dim F(U) = 1$.

3. Quali applicazioni A sono mappe lineari?
   (i) $A : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ data da $A(x) = |x|$;
   (ii) $A : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix};$$

   (iii) $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + 2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix};$$

   (iv) $A : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \end{pmatrix};$$

   (v) $A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4^2 \end{pmatrix}.$$

Sol. (i) No. Ad esempio $A(-1) = |-1| = 1$; $A(1) = |1| = 1$ e dunque prendendo $\lambda = -1$ e $x = 1$ si ha $A(\lambda x) \neq \lambda A(x)$.

(ii) Si. Segue dal fatto che tutte le righe del vettore colonna $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ x_1 \end{pmatrix}$ sono lineari nelle coordinate $x_1, \ldots, x_n$.

(iii) No. La prima riga del vettore $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + 2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$ non è lineare nelle coordinate, contenendo un termine noto. In particolare $A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(iv) Si. Segue dal fatto che tutte le righe del vettore colonna $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$ sono lineari nelle coordinate $x_1, \ldots, x_n$.

(v) No. La seconda riga del vettore $\begin{pmatrix} 2x_2 + x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 + x_4^2 \end{pmatrix}$ non è lineare nelle coordinate, contenendo un termine di seondo grado. In particolare si ha

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Sia M una matrice $m \times n$. Indichiamo con $F_M \colon \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$ l'applicazione data dalla moltiplicazione matrice-vettore $F_M(X) = MX$, con $X \in \mathbf{R}^n$.
   (i) Calcolare l'applicazione composta $F_A \circ F_B$ dove $F_B : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ e $F_A : \mathbf{R}^3 :\longrightarrow \mathbf{R}^2$ sono individuate dalle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calcolare $\quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$

   (ii) Calcolare le composizioni $F_A \circ F_B$ e $F_B \circ F_A$ dove $F_B : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^4$ e $F_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}$ sono individuate dalle matrici

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Calcolare $\quad F_A \circ F_B(4), \quad F_A \circ F_B(0), \quad F_A \circ F_B(11).$

Calcolare $\quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}), \quad F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}).$

(iii) Calcolare le composizioni $F_A \circ F_B$ e $F_B \circ F_A$, dove $F_A,\ F_B : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ sono individuate dalle matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Sol. (i) Si tratta dell'applicazione $F_A \circ F_B(X) = ABX$. Dunque è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_A \circ F_B(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

(ii) $F_A \circ F_B$ è rappresentata dalla matrice $AB = (-7)$. L'applicazione $F_B \circ F_A$ è invece rappresentata dalla matrice

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Ne segue che $F_A \circ F_B(4) = -28$; $F_A \circ F_B(0) = 0$; $F_A \circ F_B(11) = -77$;

$$F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_B \circ F_A(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(iii) La composizione $F_A \circ F_B$ è rappresentata dalla matrice

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La composizione $F_B \circ F_A$ è invece rappresentata dalla matrice

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Calcolare la dimensione del nucleo e la dimensione dell'immagine delle applicazioni lineari:
   (i) $L_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

   (ii) $L_A : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ dove A è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   (iii) $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

   (iv) $F : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Sol. Il nucleo di L_A è lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo rappresentato dalla matrice A. Dal teorema di Rouché-Capelli si ha pertanto $\dim(\ker(L_A)) = 4 - \text{rango}(A)$. D'altra parte l'immagine di L_A è generata dalle colonne di A e dunque $\dim(\text{im}(L_A)) = \text{rango}(A)$. Si vede così che tutto si riduce a calcolare il rango della matrice A, il che può essere fatto con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dunque il rango di A è 3, da cui $\dim(\ker(L_A)) = 1$ e $\dim(\text{im}(L_A)) = 3$.

(ii) Mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan otteniamo immediatamente che il rango di A è 2, da cui $\dim(\ker(L_A)) = 2$ e $\dim(\mathrm{im}(L_A)) = 2$.

(iii) La matrice associata ad F è $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, che si vede facilmente avere rango 2. Ne segue $\dim(\ker(F)) = 0$ e $\dim(\mathrm{im}(F)) = 2$.

(iv) La matrice associata ad F è $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, che si vede facilmente avere rango 2. Ne segue $\dim(\ker(F)) = 1$ e $\dim(\mathrm{im}(F)) = 2$.

6. Siano $F : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

e $G : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare individuata dalla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare $\ker(F)$, $\ker(G)$, $\mathrm{im}(F)$ e $\mathrm{im}(G)$.

(ii) Calcolare la matrice associata a F e a $G \circ F$.

(iii) Calcolare $\ker(G \circ F)$ e $\mathrm{im}(G \circ F)$.

Sol. (i) Per calcolare $\ker(F)$ dobbiamo semplicemente risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione di questo sistema è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero $\ker(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Per calcolare $\ker(G)$ cominciamo con lo scrivere

$$G(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ x_3 - x_4 \end{pmatrix}$$

A questo punto l'unica cosa che dobbiamo fare è risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Usiamo l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

da cui

$$\begin{cases} x_1 = (1/2)x_4 \\ x_2 = (3/2)x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

che possiamo riscrivere come $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $\ker(G) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. per determinare l'immagine di F scriviamo la matrice associata ad F. Si tratta della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto $\text{im}(F) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ (si vede facilmente che questi due vettori sono linearmente indipendenti). Per scrivere l'immagine di G utilizziamo invece la matrice associata a G; otteniamo: $\text{im}(G) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. dall'analisi fatta sopra mediante l'algoritmo di Gauss-Jordan, sappiamo che i primi tre di questi vettori sono lineramente indipendenti. Ma tre vettori indipendenti in $\mathbf{R}^3$ sono una base. Dunque $\text{im}(G) = \mathbf{R}^3$.
(ii) Abbiamo già calcolato la matrice associata ad F nel punto (i). La matrice associata a $G \circ F$ è

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(iii) Per determinare $\ker(G \circ F)$ dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $x_1 = 2x_2$, ovvero $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ne segue $\ker(G \circ F) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
L'immagine di $G \circ F$ è $\text{im}(G \circ F) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

7. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$X \mapsto AX, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U = \dim F(U)$.
(ii) Determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U > \dim F(U)$.
(iii) Dimostrare che in generale, data un'applicazione lineare $F\colon V \to W$, non esiste nessun sottospazio $U \subset V$ tale che $\dim U < \dim F(U)$.

Sol. (i) Osserviamo che $\ker F = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, dunque F non è iniettiva. Un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U = \dim F(U)$ è un qualunque sottospazio che interseca $\ker F$ nel vettore nullo. Ad esempio $U = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, oppure $U = span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. Nel primo caso $F(U) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, e vale $\dim U = \dim F(U) = 1$. Nel secondo caso $F(U) = span\{\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, e vale $\dim U = \dim F(U) = 2$;
(ii) Un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$ tale che $\dim U > \dim F(U)$ è un qualunque sottospazio che ha intersezione di dimensione positiva con $\ker F$. Ad esempio il nucleo stesso.
Oppure $U = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. In questo caso, $F(U) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ e vale $\dim U = 2 > \dim F(U) = 1$.
(iii) Vedi dispense.

1. Sia $F\colon \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione lineare data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix},$$

e siano dati i sottospazi

$$U = span\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \qquad W = span\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

(i) Determinare $\ker F$ e dire se F è iniettiva.
(ii) Determinare l'immagine $F(\mathbf{R}^4)$, esibendone una base.
(iii) Calcolare $\dim U$, $U \cap \ker F$, $\dim F(U)$, esibire una base di $F(U)$.
(iv) Calcolare $\dim W$, $W \cap \ker F$, $\dim F(W)$, esibire una base di $F(W)$.
(v) Spiegare i risultati ottenuti in (iii) e (iv).

Sol. (i) Determinare il nucleo di F equivale a risolvere il sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Poiché il nucleo di F è non banale (ha dimensione 1) l'applicazione F non è iniettiva.
(ii) L'immagine $F(\mathbf{R}^4)$ è generata dalle colonne della matrice che rappresentativa di F, ovvero della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Applicando il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan, si vede facilmente che le prime tre colonne sono linearmente indipendenti, mentre la quarta colonna dipende linearmente dalle prime tre. Ne segue che una base di $F(\mathbf{R}^4)$ è costituitra dai tre vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In particolare, l'immagine di F ha dimensione 3.

(iii) Utilizzando l'algoritmo di Gauss-Jordan si vede facilmente che i generatori dati per U sono linearmente indipendenti, da cui $\dim U = 2$. Per determinare $\ker F \cap U$ sostituiamo le coordinate di un generico vettore di U

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbf{R}$$

nelle equazioni del sistema lineare che definisce $\ker F$. Troviamo che necessariamente $a = b = 0$, per cui $\ker F \cap U$ è il vettore nullo di $\mathbf{R}^4$.

Alternativamente: risolviamo

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

ovvero

$$\begin{cases} 3a + c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ a + b - c = 0 \\ c = 0. \end{cases}$$

E' immediato verificare che l'unica soluzione di questo sistema è quella banale, ovvero $a = b = c = 0$. Sostituendo i valori $a = b = c = 0$ nell'equazione (*), troviamo che $\ker F \cap U = \{0\}$.

Lo spazio $F(U)$ è generato dai due vettori

$$F \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sono linearmente indipendenti, pertanto sono una base di $F(U)$, che ha dimensione 2.

(iv) In modo del tutto analogo al punto (ii) si trova che $\dim W = 2$. Per determinare $\ker F \cap W$ sostituiamo le coordinate di un generico vettore di W

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbf{R}$$

nelle equazioni del sistema lineare che definisce $\ker F$. Troviamo che necessariamente $a = -b$, per cui $\ker F \cap W$ è il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dal vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Alternativamente: risolviamo

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

ovvero

$$\begin{cases} -a+c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ -a+c=0 \end{cases}$$

la cui soluzione è $a=-b=c$. Sostituendo $a=-b=c$ nell'equazione (**) si trova che $\ker F \cap W$ é lo spazio genarato da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, e coincide con $\ker F$. Lo spazio $F(W)$ è generato dai due vettori

$$F\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Essi sono linerment dipendenti (sono addirittura uguali) pertanto una base è costituita da uno solo di essi; la dimensione di $F(W)$ è 1.
(v) In generale, se $\varphi: V_1 \to V_2$ è un'applicazione lineare, vale

$$\dim \varphi(V_1) = \dim V_1 - \dim \ker \varphi$$

Se prendiamo $V_1 = U$, $V_2 = \mathbf{R}^4$ e $\varphi = F|_U$ (F ristretta al sottospazio U), otteniamo

$$\dim F|_U(U) = \dim U - \dim \ker(F|_U)$$

Ma $F|_U(U) = F(U)$ e $\ker(F|_U) = \ker F \cap U$, da cui

$$\dim F(U) = \dim U - \dim(\ker F \cap U)$$

in accordo con quanto trovato al punto (iii). Il risultato del punto (iv) si spiega allo stesso modo.

2. Sia $F: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data da

$$F(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare $\ker F$ e $\mathrm{Im}(F)$ esibendone delle basi.
(ii) È possibile determinare un sottospazio $U \subset \mathbf{R}^3$, di dimensione 2, tale che $\dim U = \dim F(U)$? Se si, determinarlo. Se no, spiegare perché.
(iii) È possibile determinare un sottospazio $W \subset \mathbf{R}^3$, di dimensione 1, tale che $\dim W = \dim F(W)$? Se si, determinarlo. Se no, spiegare perché.

Sol. (i) Si vede subito che $\ker F$ è l'insieme dei vettori della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, ovvero $\ker F = \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Altrettanto immediato è osservare che l'immagine di F è $\mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) Dalla formula per le dimensioni scritta al punto (v) dell'esercizio precedente sappiamo che il problema equivale a determinare un sottospazio U di dimensione 2 di $\mathbf{R}^3$ tale $\dim(U \cap \ker F) = 0$. Ma $\dim(\ker F) = 2$ e dalla formula di Grassmann

$$\dim(U \cap \ker F) = \dim(U) + \dim(\ker F) - \dim(U + \ker F) \geq 2 + 2 - 3 = 1$$

Dunque non esiste alcun sottospazio U con $\dim(U) = \dim F(U) = 2$.
(iii) Il problema è del tutto analogo al precedente. In questo caso, però, $\dim(W) = 1$ e dunque W è abbastanza piccolo ed è possibile sceglierlo in modo che non intersechi $\ker F$ se non nello 0. Più formalmente, dato che uno spazio W di dimensione uno è della forma $W = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right\}$, l'unica condizione da soddifare affinché $W \cap \ker F = \{0\}$ è

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \notin \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ovvero $a \neq 0$.

3.
(i) Scrivere un'applicazione lineare iniettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.
(ii) Scrivere un'applicazione lineare iniettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.
(iii) Scrivere un'applicazione lineare suriettiva $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$.
(iv) Scrivere un'applicazione lineare suriettiva $F\colon \mathbf{R}^5 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Se ne può trovare una sia iniettiva che suriettiva? Se si, determinarla. Se no, spiegare perché.

Sol. (i) L'applicazione identica da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ è sia iniettiva che surietiva. Più in generale le applicazioni sia iniettive che suriettive da $\mathbf{R}^3$ in sè si caratterizzano come quelle rappresentate da matrici 3×3 aventi rango 3.
(ii) L'applicazione

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è iniettiva. Più in generale le applicazioni iniettive da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ sono tutte e sole quelle rappresentate da una matrice 4×3 avente rango 3. Non possono esistere applicazioni suriettive da $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^4$ in quanto la dimensione dell'immagine di un'applicazione è sempre minore o uguale alla dimensione dello spazio di partenza (dominio dell'applicazione).

(iii) Abbiamo già scritto un'applicazione suriettiva da $\mathbf{R}^3$ in sè al punto (i). Più in generale, le applicazioni suriettive da $\mathbf{R}^3$ in sè si caratterizzano come quelle rappresentate da matrici 3×3 aventi rango 3 (e sono automaticamente anche iniettive).
(iv) L'applicazione

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

è suriettiva. Più in generale le applicazioni suriettive da $\mathbf{R}^5$ in $\mathbf{R}^3$ sono tutte e sole quelle rappresentate da una matrice 3×5 avente rango 3. Non possono esistere applicazioni iniettive da $\mathbf{R}^5$ in $\mathbf{R}^3$ in quanto la dimensione del nucleo di un'applicazione è sempre maggiore o uguale alla differenza tra la dimensione dello spazio di partenza (dominio dell'applicazione) e quella dello spazio di arrivo (codominio dell'applicazione). In questo caso stiamo dicendo che il nucleo di una qualunque applicazione $F\colon \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^3$ ha dimensione almeno 2.

4. Sia $F\colon \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ un'applicazione lineare, tale che

$$F(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad F(\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Calcolare $F(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}6\\7\\1\end{pmatrix})$, $F(\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix})$.

Sol. Indichiamo con $\mathcal{B}$ l'insieme dei tre vettori

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \right\}$$

E' immediato verificare che si tratta di una base di $\mathbf{R}^3$. Il dato fornito su F pertanto si interpreta come: la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, rispetto alla base $\mathcal{B}$ nello spazio di partenza e la base canonica nello spazio di arrivo è la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Ne segue che la matrice che rappresenta l'applicazione lineare $F\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$, rispetto alla base canonica nello spazio di partenza e nello spazio di arrivo è la matrice

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2/3\\1 & 0 & -2/3\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Pertanto,

$$F\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & -2/3\\1 & 0 & -2/3\\1 & 0 & -1\\1 & -1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/3\\1/3\\0\\0\end{pmatrix}$$

Analogamente

$$F\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8/3\\1/3\\0\\-2\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4/3\\2/3\\0\\0\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10/3\\5/3\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$F\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\-1\\-2\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}6\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/3\\16/3\\5\\-1\end{pmatrix}, \quad F\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-25/3\\-4/3\\-2\\-7\end{pmatrix},$$