Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Scienza e Tecnologia dei Media
Esercizi GEOMETRIA (I modulo)
SOTTOSPAZI E SOMMA DIRETTA. FORMULA DI GRASSMANN
Docente: Prof. F. Flamini

<ins>**Esercizi Svolti**</ins>

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato della base canonica e siano dati i due sottospazi

$$U: \quad \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 & = & 0 \\ X_1 + X_4 & = & 0 \end{cases}$$

e

$$W = Span \left\{ \overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Determinare $\dim(U)$, $\dim(W)$ e basi dei due sottospazi.
(ii) Determinare equazioni parametriche di U ed equazioni parametriche e cartesiane di W.
(iii) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$. In caso di risposta negativa, determinare dimensione ed una base di $U + W$ e stabilire se $U + W = U \oplus W \subset \mathbb{R}^4$.

Svolgimento. (i) Notiamo che $\overline{w}_3 = 4\overline{w}_1 + 3\overline{w}_2$, mentre i primi due vettori che definiscono W non sono proporzionali. Pertanto $\dim(W) = 2$ ed una base per W e' proprio $w := \overline{w}_1, \overline{w}_2$.
Risolvendo ora il sistema lineare dato dalle equazioni cartesiane che definiscono U si ha che la soluzione generale del sistema e'

$$\overline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\bar{b}_1 + s\bar{b}_2, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(ii) Dal punto precedente, equazioni parametriche di U sono:

$$X_1 = t, X_2 = s, X_3 = -t + s, X_4 = -t, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, equazioni parametriche di W sono:

$$X_1 = a + 2b, X_2 = 0, X_3 = -2b, X_4 = a - 2b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

e quindi equazioni cartesiane di W sono

$$X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 = X_2.$$

(ii) Per determinare $U \cap W$ si mettono a sistema le equazioni cartesiane di U e di W e si ottiene

$$U \cap W = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dalla formula di Grassmann,

$$\dim(U + W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Quindi non solo $\mathbb{R}^4$ non e' somma diretta di U con W, ma anche il sottospazio somma $U + W$ non e' somma diretta, dato che $U \cap W \neq \{\overline{0}\}$. Una base per $U + W$ e' data dai vettori $\overline{w}_1, \overline{u}_1, \overline{u}_2$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito della base canonica e, siano assegnati i seguenti vettori:

$$\overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui coordinate sono espresse rispetto ad e. Sia

$$W := Span(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3, \overline{w}_4).$$

(i) Determinare la dimensione di W estraendo dal sistema di generatori dato una base b per W.
(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di W.
(iii) Estendere b ad una base per tutto $\mathbb{R}^4$.
Svolgimento. (i) I vettori dati sono banalmente linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^4$. Basta calcolare il determinante della matrice A del sistema dei quattro vettori dati rispetto ad

e. Ad esempio utilizzando lo sviluppo di Laplace rispetto all'ultima colonna, rapidamente si vede che $\det(A) = 0$. Tuttavia considerando la sottomatrice $A(2, 3, 4|2, 3, 4)$, notiamo che essa ha determinante non nullo. Pertanto

$$\dim(W) = rg(A) = 3$$

ed una base b per W e' ad esempio costituita dai tre vettori $b := \overline{w}_2, \overline{w}_3, \overline{w}_4$.
(ii) Poiche' W e' un iperpiano in $\mathbb{R}^4$, per trovare l'equazione cartesiana basta considerare la formula determinantale

$$\det(X \; \overline{w}_2 \; \overline{w}_3 \; \overline{w}_4) = 0,$$

che fornisce $2X_1 + X_2 - X_4 = 0$. Equazioni parametriche sono ovviamente

$$X_1 = t, X_2 = s, X_3 = k, X_4 = 2t + s.$$

(iii) Per estendere b ad una base di $\mathbb{R}^4$ basta prendere un qualsiasi vettore le cui coordinate rispetto ad e non soddisfino l'equazione cartesiana di W, ad esempio $\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^5$, dotato della base canonica e sia dato il sottospazio vettoriale W di equazioni cartesiane

$$W : \begin{cases} X_1 - X_3 + X_5 & = & 0 \\ X_2 - X_5 & = & 0 \end{cases}$$

(i) Determinare $\dim(W)$.
(ii) Determinare equazioni parametriche di W.
(iii) Trovare generatori ed equazioni cartesiane di un sottospazio U di $\mathbb{R}^5$ che risulti essere un sottospazio supplementare a W (in altri termini, tale che $U \oplus W = \mathbb{R}^5$).

Svolgimento. (i) Notiamo che le 2 equazioni che definiscono W sono indipendenti. Quindi dalla teoria dei sistemi lineari $\dim(W) = 5 - 2 = 3$.

(ii) Risolvendo il sistema lineare che definisce W, le equazioni parametriche vettoriali di W risultano

$$\overline{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

(iii) Un supplemento di W deve essere necessariamente un piano vettoriale. Notiamo che dalla struttura dei vettori della base di W, sicuramente i vettori $\overline{e}_3$ ed $\overline{e}_5$ non appartengono a W. Pertanto $U = Span\{\overline{e}_3, \overline{e}_5\}$ e le sue equazioni cartesiane sono dunque

$$X_1 = X_2 = X_4 = 0.$$

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito della base canonica e, sia assegnato il seguente sistema v di vettori:

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \ \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}, \ \overline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui coordinate sono espresse rispetto alla base e e dove $k \in \mathbb{R}$ e' un parametro reale. Sia

$$W_k := Span\,(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4)\,.$$

(i) Determinare la dimensione di W_k, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
(ii) Per $k = 0$, stabilire se il vettore $\overline{z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, espresso in coordinate rispetto alla base e, appartiene al sottospazio W_0.
(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di W_0.
(iv) Stabilire se e' possibile trovare equazioni cartesiane per W_k, con $k \neq 0$.

Svolgimento. (i) Denotata con $A_k := M_{e,v}$ la matrice del sistema v rispetto ad e, si ha:

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & k & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando lo sviluppo del determinate secondo Laplace, si ottiene $\det(A_k) = 2k^2$.

Pertanto, per $k \neq 0$, v e' una base di $\mathbb{R}^4$ e quindi $W_k = \mathbb{R}^4$; invece per $k = 0$, poiche' $\det(A_0(1,2,4|1,2,4)) \neq 0$, si ha $\dim W_0 = 3$ ed una sua base e' contestualmente

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Abbiamo che $\overline{z} \in W_0$ se, e solo se, il rango della matrice orlata $(A_0(1,2,4|1,2,4) \ \ \overline{z})$ e' 3. Ma,

$$\det\left(A_0(1,2,4|1,2,4) \ \ \overline{z}\right) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

come si ottiene facilmente utilizzando ad esempio lo sviluppo secondo Laplace rispetto alla seconda colonna. Pertanto $\overline{z}$ non appartiene a W_0.

(iii) Le equazioni parametriche di W_0 si determinano immediatamente, dato che si conosce esplicitamente una sua base. Si ottiene pertanto

$$X_1 = t_1 + t_2 + t_3, X_2 = t_3, X_3 = t_3, X_4 = t_1,$$

dove $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ parametri liberi.

Poiche' W_0 e' un iperpiano in $\mathbb{R}^4$, la sua codimensione in $\mathbb{R}^4$ e' 1. Pertanto W_0 sara' definito da un'unica equazione cartesiana. Notando la relazione che c'e' tra la seconda e la terza equazione delle equazioni parametriche scalari che definiscono W_0, si ha pertanto che un'equazione cartesiana di W_0 e'

$$X_2 - X_3 = 0.$$

(iv) Per W_k con $k \neq 0$, non e' possibile trovare equazioni cartesiane dato che in questi casi W_k coincide con tutto lo spazio vettoriale ambiente $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato della base canonica e, siano assegnati i vettori:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che sono linearmente indipendenti e completare il sistema di vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$.
(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio U di $\mathbb{R}^4$ dato da $U := Span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.
(iii) Sia W un qualsiasi sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che sia supplementare ad U. Scrivere equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio W.
Svolgimento: (i) La matrice che ha per colonne le coordinate dei vettori dati ha manifestamente rango 3. Pertanto i tre vettori sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$. Per completare il sistema di vettori dato ad una base di $\mathbb{R}^4$ si puo' scegliere semplicemente

$$\underline{v}_4 := \underline{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dato che i tre vettori dati hanno sempre l'ultima coordinata nulla, quindi $\underline{e}_4$ e' sicuramente linearmente indipendente da loro.
(ii) Le equazioni parametriche di U sono quindi

$$X_1 = \lambda + \mu + \nu, X_2 = \mu + \nu, X_3 = \nu, X_4 = 0, \ \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Poiche' U ha dimensione 3, allora U e' un'iperpiano in $\mathbb{R}^4$, i.e. e' definito da una sola equazione che e' quindi

$$X_4 = 0.$$

(iii) Vista la non univocita' di sottospazi supplementari ad un dato iperpiano, per comodita' possiamo scegliere $W = Span\{\underline{e}_4\}$. Quindi equazioni parametriche di W sono

$$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

mentre equazioni cartesiane sono

$$X_1 = X_2 = X_3 = 0.$$

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato della base canonica e, siano dati i due sottospazi

$$U : \quad \left\{ \begin{array}{rcl} X_1 - X_2 + X_3 & = & 0 \\ X_1 + X_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

e

$$W = Span \left\{ \overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Determinare $\dim(U)$, $\dim(W)$ ed opportune basi dei due sottospazi.
(ii) Determinare equazioni parametriche di U ed equazioni parametriche e cartesiane di W.
(iii) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Svolgimento. (i) Notiamo che $\overline{w}_3 = 4\overline{w}_1 + 3\overline{w}_2$, mentre i primi due vettori che definiscono W non sono proporzionali. Pertanto $\dim(W) = 2$ ed una base per W e' proprio $w := \overline{w}_1, \overline{w}_2$.
Risolvendo ora il sistema lineare dato dalle equazioni cartesiane che definiscono U si ha che la soluzione generale del sistema e'

$$\overline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\overline{b}_1 + s\overline{b}_2, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(ii) Dal punto precedente, equazioni parametriche di U sono:

$$X_1 = t, X_2 = s, X_3 = -t + s, X_4 = -t, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, equazioni parametriche di W sono:

$$X_1 = a + 2b, X_2 = 0, X_3 = -2b, X_4 = a - 2b, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

e quindi equazioni cartesiane di W sono

$$X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 = X_2.$$

(ii) Per determinare $U \cap W$ si mettono a sistema le equazioni cartesiane di U e di W e si ottiene

$$U \cap W = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quindi $\mathbb{R}^4$ non e' somma diretta di U con W. Eppure, facilmente si vede che $U + W = \mathbb{R}^4$.