

Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata"

Esercizi GEOMETRIA I Modulo (STM)

RANGO, CAMBIAMENTI DI BASE

Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 , munito della base canonica e , siano assegnati i seguenti vettori, espressi in coordinate rispetto alla base e :

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Estrarre da tale sistema di vettori una base v per \mathbb{R}^3 .
- (ii) Considerato il vettore $\bar{u} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$, calcolare le coordinate di \bar{u} rispetto alla base v trovata al punto (i).
- (iii) Determinare le coordinate del vettore $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ in base e sapendo che, rispetto alla

base v , esso ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Svolgimento. (i) Notiamo che $\bar{v}_3 = 2\bar{v}_1 + 3\bar{v}_2$. Mentre $\det(\bar{v}_1 \bar{v}_2 \bar{v}_4) = -1 \neq 0$. Prendiamo AD ESEMPIO

$$v = \bar{v}_1, \bar{v}_4, \bar{v}_2$$

in quest'ordine (sarebbe andato bene anche $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_4$).

- (ii) Presa $v := \bar{v}_1, \bar{v}_4, \bar{v}_2$ la nuova base, con i soliti conti si ottiene $\bar{u} = -2\bar{v}_1 - 2\bar{v}_4 + 3\bar{v}_2$.
- (iii) $\bar{w} = 1\bar{v}_1 + 1\bar{v}_4 + 1\bar{v}_2 = (4, 2, 5) = 4\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^3 , munito della base canonica e , siano assegnati i vettori

$$\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

espressi in coordinate rispetto alla base canonica e :

- (i) Verificare che i tre vettori costituiscono una base u per \mathbb{R}^3 .

(ii) Siano dati i vettori $\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, le cui coordinate si intendono rispetto alla base e . Verificare che sono linearmente indipendenti e trovare le loro coordinate rispetto alla base u .

(iii) Si consideri lo spazio vettoriale \mathbb{R}^3 dotato di base u e siano Y_1, Y_2, Y_3 le coordinate nel riferimento (\mathbb{R}^3, u) . Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio

$$W := \text{Span}\{\bar{x}, \bar{y}\}$$

nelle coordinate Y_1, Y_2, Y_3 .

(iv) Trovare un qualsiasi vettore \bar{z} non appartenente a W e scrivere le coordinate di \bar{z} in base e .

Svolgimento. (i) Notiamo che la matrice che ha come colonne i vettori di u espressi rispetto la base e e' la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, che ha determinante uguale a -2 . Pertanto u e' una base.

(ii) L'indipendenza lineare di vettori e' un concetto indipendente dalla rappresentazione di essi in coordinate rispetto ad una base. Pertanto, la matrice 3×2 che ha per colonne le coordinate dei vettori \bar{x}, \bar{y} in base e ha manifestamente rango 2. Questo implica che i due vettori sono linearmente indipendenti.

Per trovare le coordinate di questi vettori in base u , si puo' procedere esprimendo i vettori \bar{x}, \bar{y} come combinazione lineare dei vettori di u . Si ottiene cosi'

$$\bar{x} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2 + 2\bar{u}_3, \quad \bar{y} = 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3.$$

(iii) Con queste coordinate, abbiamo che W e' descritto dalle equazioni parametriche

$$Y_1 = t, \quad Y_2 = -t + 2s, \quad Y_3 = 2t + s$$

e dall'equazione cartesiana

$$5Y_1 + Y_2 - 2Y_3 = 0.$$

(iv) Notiamo che, nelle coordinate date nel riferimento (\mathbb{R}^3, u) , il vettore \bar{u}_1 ha coordinate $\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esse non soddisfano l'equazione cartesiana di W . Pertanto, si può scegliere $\bar{z} = \bar{u}_1$, le cui coordinate in base e sono già note.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 , munito della base canonica e , siano assegnati i seguenti vettori:

$$\bar{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui coordinate sono espresse rispetto ad e . Sia

$$W := \text{Span}(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3).$$

(i) Determinare la dimensione di W , estraendo dal sistema di generatori dato una base b per W .

(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di W .

(iii) Determinare una base di un sottospazio di \mathbb{R}^4 supplementare a W .

Svolgimento. (i) I vettori dati sono banalmente linearmente dipendenti in \mathbb{R}^4 . Basta calcolare il rango della matrice A del sistema dei tre vettori dati rispetto ad e . Tuttavia considerando la sottomatrice $A(1, 2|1, 2)$, notiamo che essa ha determinante non nullo. Pertanto

$$\dim(W) = \text{rg}(A) = 2$$

ed una base b per W e' ad esempio costituita dai vettori $b := \bar{w}_1, \bar{w}_2$.

(ii) Imponendo la condizione

$$\text{rg}(A_1 \ A_2 \ X) = 2,$$

dove A_i e' la colonna i -esima di A ed X la colonna delle indeterminate, si ottengono le equazioni cartesiane di W , che sono

$$2X_1 + X_3 = 0 = X_1 - 2X_2 + X_4.$$

Risolvendo il sistema lineare, si trovano anche equazioni parametriche per W , cioe'

$$x_1 = t, \ x_2 = s, \ x_3 = -2t, \ x_4 = -t + 2s.$$

(iii) Un sottospazio supplementare a W in \mathbb{R}^4 ha dimensione 2. Una base per tale spazio e' quindi costituita ad esempio dai vettori \bar{e}_1 e $\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2$ che entrambi non soddisfano le equazioni cartesiane di W e sono manifestamente linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 , munito della base canonica e , siano assegnati i seguenti vettori:

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

le cui coordinate sono espresse rispetto ad e . Sia

$$U := \text{Span}(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3).$$

(i) Determinare la dimensione di U , estraendo dal sistema di generatori dato una base b per U .

(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di U .

(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $W \subset U$ determinato dalla retta vettoriale di vettore direttore \bar{b}_1 .

Svolgimento. (i) I vettori dati sono banalmente linearmente dipendenti in \mathbb{R}^4 . Basta calcolare il rango della matrice A del sistema dei tre vettori dati rispetto ad e . Tuttavia considerando la sottomatrice $A(1, 2|2, 3)$, notiamo che essa ha determinante non nullo. Pertanto

$$\dim(W) = \text{rg}(A) = 2$$

ed una base b per W e' ad esempio costituita dai vettori $b := \bar{b}_2, \bar{b}_3$.

(ii) Imponendo la condizione

$$\text{rg}(A_2 \ A_3 \ X) = 2,$$

dove A_i e' la colonna i -esima di A ed X la colonna delle indeterminate, si ottengono le equazioni cartesiane di U , che sono

$$2X_1 + X_3 = 0 = X_1 - 2X_2 + X_4.$$

Risolvendo il sistema lineare, si trovano anche equazioni parametriche per U , cioe'

$$x_1 = t, \ x_2 = s, \ x_3 = -2t, \ x_4 = -t + 2s.$$

(iii) Le equazioni parametriche di W sono ovviamente

$$X_1 = 2h, X_2 = h, X_3 = -4h, X_4 = 0.$$

Poiché $W \subset U$ e dal fatto che U è un piano vettoriale, è sufficiente trovare un'ulteriore equazione cartesiana di un iperpiano che tagli W su U che sia linearmente indipendente dalle due equazioni cartesiane trovate al punto (ii) che definiscono U . Guardando l'espressione parametrica del generico vettore di W , notiamo che vale la relazione ulteriore $X_4 = 0$. Pertanto equazioni cartesiane di W sono date dal sistema 3 equazioni e 4 indeterminate:

$$2X_1 + X_3 = 0 = X_1 - 2X_2 = 0 = X_4.$$

Esercizio 5. In \mathbb{R}^3 , munito della base canonica e , siano assegnati i seguenti vettori:

$$\bar{v}_1 = (0, 1, -1), \bar{v}_2 = (1, 0, 1), \bar{v}_3 = (1, -1, 3),$$

le cui coordinate sono espresse rispetto ad e .

- (i) Verificare che $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ sono generatori per \mathbb{R}^3 e che sono linearmente indipendenti.
- (ii) Considerato il vettore \bar{w} che, rispetto ad e , ha coordinate $\bar{w} = (1, 0, 2)$, calcolare le coordinate di \bar{w} rispetto alla base v data dai vettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$.
- (iii) Determinare le coordinate del vettore $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base e sapendo che, rispetto alla base v , esso ha coordinate $(1, -2, 1)$.

Svolgimento. (i) I vettori dati sono banalmente linearmente indipendenti in \mathbb{R}^3 . Basta calcolare il determinante della matrice del sistema dei tre vettori dati rispetto ad e . Siccome sono tre vettori linearmente indipendenti in \mathbb{R}^3 , non possono che generare tutto lo spazio vettoriale, i.e. sono una sua base.

(ii) Ponendo

$$\bar{w} = (1, 0, 2) = c_1(0, 1, -1) + c_2(1, 0, 1) + c_3(1, -1, 3)$$

si trova

$$c_1 = 1, c_2 = 0, c_3 = 1;$$

queste sono le coordinate di \bar{w} rispetto alla base v .

- (iii) $\bar{u} = 1\bar{v}_1 - 2\bar{v}_2 + \bar{v}_3 = (-1, 0, 0)$, che sono le sue coordinate rispetto alla base canonica e .

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 , dotato della base canonica e , siano assegnati i vettori:

$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1 - \bar{e}_3 + \bar{e}_4, \quad \bar{v}_2 = \bar{e}_2 - \bar{e}_4, \quad \bar{v}_3 = \bar{e}_3 + \bar{e}_4.$$

(i) Verificare che i tre vettori sono linearmente indipendenti.

(ii) Determinare un vettore $\bar{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ tale che valgano contemporaneamente le condizioni:

(a) $v := \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ sia una base di \mathbb{R}^4 , e

(b) il vettore \bar{w} , che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base e , abbia coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

rispetto alla base v .

Svolgimento. (i) La matrice che ha per colonne le coordinate del sistema dei tre vettori dati rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Immediatamente osserviamo che $r(A) = 3$, dato che

$$\det A(1, 2, 3; 1, 2, 3) = 1 \neq 0;$$

quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti in \mathbb{R}^4 .

(ii) Consideriamo ora un arbitrario vettore $\bar{v}_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, le cui coordinate sono sempre

rispetto alla base e . La matrice del sistema di vettori $v = \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ rispetto ad e è la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

Affinchè v sia una base, si deve avere $\det C \neq 0$. Pertanto, sviluppando il determinante di C con il metodo di Laplace rispetto alla prima riga, otteniamo che \mathcal{V} è una base non

appena

$$-2a + b - c + d \neq 0.$$

Questa è la prima relazione che otteniamo dalla condizione (a) del testo. Pertanto, per ogni scelta di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ soddisfacenti la condizione $-2a + b - c + d \neq 0$ si ottiene sempre una base v di \mathbb{R}^4 .

Dalla condizione (ii), vogliamo scegliere v di modo che valga

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene pertanto

$$a = 1, b = 1, c = -2, d = -2$$

che in effetti soddisfa la condizione $-2a + b - c + d \neq 0$. In definitiva $v_4 = e_1 + e_2 - 2e_3 - 2e_4$.