Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata"
Esercizi GEOMETRIA I Modulo (STM)
Operatori autoaggiunti. Teorema spettrale
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano vettoriale euclideo, munito di base canonica e e di prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Denotiamo con $\overline{x} = (x_1, x_2)$ il sistema di coordinate indotto da e. Sia data la matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare un'isometria lineare M di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizzi A.
(ii) Descrivere il cambiamento di coordinate dal riferimento dato da e al riferimento in cui A si diagonalizza.
Svolgimento: (i) e (ii): la amtrice A e' simmetrica. Quindi, in base canonica e, corrisponde ad un operatore autoaggiunto $F = F_A$. Il polinomio caratteristico di F, e quindi di A, e'

$$det(A - tI) = t(t-5).$$

Gli autovalori di A sono

$$0 \text{ e } 5.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, tali autovalori forniscono la seguente base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A:

$$\mathbf{f}_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad \mathbf{f}_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Se consideriamo sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, munito di questa nuova base ortonormale f, coordinate (y_1, y_2) relative alla base f allora, dalle varie conseguenze del teorema Spettrale, si ha che in base f la rappresentazione di F e' data dalla forma diagonale $\Delta = Diag\{0\ 5\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Poiche' nel testo e' richiesto esplicitamente di trovare la trasformazione (isometria lineare) di coordinate di $\mathbb{R}^2$ in cui A si diagonalizza, allora osserviamo che i versori della base f formano la matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice determina la trasformazione di coordinate

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioe'

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

Le coordinate $\overline{y}$ sono il sistema di coordinate dove A si diagonalizza.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito di base canonica e e prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, si consideri fissato il vettore

$$\mathbf{u}_0 = (1, 2, 1).$$

Sia T l'operatore lineare di $\mathbb{R}^3$, definito da

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0, \;\; \forall \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Stabilire se T e' un operatore autoaggiunto;
(ii) Scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica e; confrontare il risultato con quanto risposto in (i).
Svolgimento: (i) T non e' autoaggiunto. Infatti, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, ricordando le proprieta' del prodotto vettoriale, si ha che

$$\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, (\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, (-\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}_0)\rangle = \langle \mathbf{x}, (-T(\mathbf{y}))\rangle.$$

Poiche' un operatore coincide con il suo opposto se e solo se e' l'operatore nullo, si ha pertanto $T \neq -T$ (dato che T e' manifestamente un operatore non-identicamente nullo). Percio' T non puo' essere autoaggiunto.
(ii) Per calcolare la matrice A di T rispetto alla base canonica, basta vedere le immagini $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$, dei tre vettori della base canonica. Per definizione di T, basta calcolare i tre prodotti vettoriali

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{u}_0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Si ha

$$T(\mathbf{e}_1) = (0, -1, 2), \quad T(\mathbf{e}_2) = (1, 0 - 1), \quad T(\mathbf{e}_3) = (-2, 1, 0).$$

Percio' la matrice A ha per i-esima colonna il vettore $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Manifestamente si vede che la matrice A non e' una matrice simmetrica. Poiche' la matrice A e' espressa utilizzando una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard che esiste su $\mathbb{R}^3$, allora possiamo anche in questo modo concludere che T non puo' essere un operatore autoaggiunto, come abbiamo dedotto in modo intrinseco al punto (i).

Esercizio 3. Sia T l'operatore autoaggiunto di $\mathbb{R}^4$ (munito di prodotto scalare standard) definito rispetto alla base canonica e dalla matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A determinando la base ortonormale in cui A risulta essere diagonale.
Svolgimento: Il polinomio caratteristico di A e'

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Quindi A ha due autovalori, i.e. 1 e -1, ambedue di molteplicita' algebrica 2. Denotati con V_1 e V_{-1} i rispettivi autospazi, troviamo che

$$V_1 = Span\{(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)\}, \quad V_{-1} = Span\{(0,1,0,0),\ (0,0,1,-1)\}$$

poiche' le equazioni cartesiane per V_1 sono

$$X_2 = X_3 - X_4 = 0,$$

mentre quelle per V_{-1} sono

$$X_1 = X_3 + X_4 = 0.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, per diagonalizzare A basta considerare una base ortonormale di autovettori di A.
Sappiamo che i due autospazi V_1 e V_{-1} sono gia' fra di loro ortogonali, poiche' sono autospazi relativi ad autovalori distinti. Osserviamo inoltre che i generatori di V_1 (rispettivamente di V_{-1}) sono due vettori ortogonali. Percio' per determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A, basta normalizzare i 4 vettori trovati. Otteniamo che la base voluta e'

$$f := \{(1,0,0,0),\ \ (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),\ \ (0,1,0,0),\ \ (0,0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\}.$$

Dalla teoria generale, in tale base, la matrice A diventa congruente alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cioe' alla matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, nell'ordine relativo alla scelta dell'ordinamento dei vettori della base f, ciascun autovalore ripetuto tante volte quanto e' la sua molteplicita' algebrica (equivalentemente geometrica).

Esercizio 4. Stabilire la forma diagonale della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Svolgimento: A e' simmetrica in base canonica, quindi per il Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, A e' sicuramente diagonalizzabile. Gli autovalori di A sono $2 \text{ e } 4$ e la sua forma diagonale e' $\Delta = Diag(2\ 4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. Stabilire la forma diagonale della seguente matrice

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

trovando esplicitamente una base diagonalizzante per A.
Svolgimento: Poiché $det\ A = -96 < 0$, esisteranno due autovalori reali discordi. Denotata con T un'indeterminata, il polinomio caratteristico di A è

$$det\ (A - TI) = T^2 - 4T - 96$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 12 \quad \lambda_2 = -8.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base $M = M_{e\ f}$ è quindi

$$M := \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente una matrice ortogonale, essendo e ed f ambedue basi ortonormali. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{3}/2y_1 + 1/2y_2, \quad x_2 = -1/2y_1 + \sqrt{3}/2y_2.$$

Ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che in tali coordinate A diventa $Diag(12\ \ -8)$ dato che $\overline{f}_1$ era l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 12$, mentre $\overline{f}_2$ è quello relativo a $\lambda_2 = -8$.

Esercizio 7. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ come piano vettoriale euclideo munito di base canonica e e prodotto scalare standard $\langle, \rangle$. Sia dato il polinomio quadratico in due indeterminate

$$P(x_1, x_2) :== x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 = \langle \overline{x}, A\overline{x} \rangle,$$

dove $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e' il vettore colonna delle indeterminate ed

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare un cambiamento lineare ortogonale di coordinate $\overline{x} = M\overline{y}$ di modo che il polinomio ottenuto per sostituzione $P(M\overline{y}) = P'(y_1, y_2)$ sia un polinomio, omogeneo di secondo grado senza il termine misto y_1y_2.

Svolgimento: La matrice A e' simmetrica. Il polinomio caratteristico di A è

$$det\ (A - TI) = T(T - 5),$$

dove T un'indeterminata. Gli autovalori di A forniscono quindi, grazie al Teorema Spettrale, la seguente trasformazione di coordinate

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

Ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che nelle nuove coordinate, il polinomio diventa $5y_2^2$.