

Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Scienza e Tecnologia dei Media
Esercizi GEOMETRIA (I modulo)
Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, Complementi ortogonali.
Proiezioni su sottospazi. Operatori ortogonali e triangolarizzazione di operatori.
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Svolti

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle, \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard \langle, \rangle , siano assegnati i vettori

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane di $W = \text{Span}\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.
(ii) Costruire a partire dal sistema di vettori $f := \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ una base ortonormale per W .

Svolgimento: (i) Sia A la matrice che ha come colonne ordinatamente i tre vettori dati. Notiamo che $\det(A(1, 2, 3; 1, 2, 3)) = 1 \neq 0$, pertanto i 3 vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(W) = 3$ ed f e' una sua base. Essendo W un iperpiano in \mathbb{R}^4 , esso e' definito da un'unica equazione cartesiana che si ottiene semplicemente sviluppando

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 0 \\ X_2 & 1 & 1 & 2 \\ X_3 & 0 & 1 & 3 \\ X_4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

i.e.

$$3X_1 - 3X_2 + 3X_3 - X_4 = 0.$$

- (ii) Notiamo ad esempio che $\langle \bar{f}_1, \bar{f}_2 \rangle = 1 \neq 0$, pertanto la base f non e' ortogonale. Mediante il procedimento di Gram-Schmidt possiamo determinare da f una base ortogonale. Poniamo

$$\bar{g}_1 = \bar{f}_1.$$

Pertanto

$$\bar{g}_2 := \bar{f}_2 - \frac{\langle \bar{f}_2, \bar{g}_1 \rangle}{\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle} \bar{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aanalogamente

$$\bar{g}_3 := \bar{f}_3 - \frac{\langle \bar{f}_3, \bar{g}_1 \rangle}{\langle \bar{g}_1, \bar{g}_1 \rangle} \bar{g}_1 - \frac{\langle \bar{f}_3, \bar{g}_2 \rangle}{\langle \bar{g}_2, \bar{g}_2 \rangle} \bar{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Il sistema di vettori $g := \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3\}$ costituisce una base ortogonale per W ma non ortonormale, dato che ad esempio $\|\bar{g}_1\| = \sqrt{2}$. Per determinare una base ortonormale per W basta quindi ortonormalizzare i vettori della base g . Notiamo che

$$\|\bar{g}_1\| = \sqrt{2}, \quad \|\bar{g}_2\| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \|\bar{g}_3\| = \frac{7}{3}\sqrt{3}.$$

Pertanto la base ortonormale cercata e' determinata dai vettori

$$\bar{h}_1 = \frac{\bar{g}_1}{\|\bar{g}_1\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_2 = \frac{\bar{g}_2}{\|\bar{g}_2\|} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{h}_3 = \frac{\bar{g}_3}{\|\bar{g}_3\|} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/21 \\ -\sqrt{3}/21 \\ \sqrt{3}/21 \\ 4\sqrt{3}/7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^5, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$, sia U il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$$

Sia P l'operatore lineare su \mathbb{R}^5 dato dalla proiezione ortogonale sul sottospazio U . Determinare la matrice $M_e(P)$ cioe' la matrice rappresentativa dell'operatore P in base canonica e .

Svolgimento: (i) Notiamo che U e'

$$U = \text{Span}\{\bar{u}_1 := \bar{e}_1, \bar{u}_2 := \bar{e}_2 + \bar{e}_3 - \bar{e}_4, \bar{u}_3 := \bar{e}_4 + \bar{e}_5\}.$$

Pertanto U^\perp e' definito da equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + X_3 - X_4 = 0 \\ X_4 + X_5 = 0 \end{cases}$$

Pertanto, si ha ad esempio che $U^\perp = \text{Span}\{\bar{w}_1 := -\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{w}_2 := \bar{e}_2 + \bar{e}_4 - \bar{e}_5\}$.

Consideriamo allora $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^\perp$ con base v data da

$$v := \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{w}_1, \bar{w}_2.$$

Pertanto la matrice cambiamento di base e'

$$M_{e,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per definizione di P , si ha:

$$M_v(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$M_e(P) = M_{e,v}M_v(P)M_{v,e} = M_{e,v}M_v(P)M_{e,v}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle, \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard \langle, \rangle , siano dati i 5 vettori

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \bar{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Denotato con $U = \text{Span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4, \bar{v}_5\}$ il sottospazio vettoriale generato dai 5 vettori, determinare una base, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di U .

(ii) Ortogonalizzare la base di U determinata al punto (i).

(iii) Estendere la base ortogonale di U determinata al punto (ii) ad una base ortogonale di \mathbb{R}^3 .

(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di U^\perp , il complemento ortogonale di U in \mathbb{R}^3 .

Svolgimento: (i) Notiamo che

$$\bar{v}_3 = \bar{v}_1 + \bar{v}_2, \bar{v}_4 = 2\bar{v}_1, \bar{v}_5 = \bar{v}_2 - \bar{v}_1$$

mentre \bar{v}_1 e \bar{v}_2 non sono proporzionali. Pertanto $\dim(U) = 2$ ed una base di U e' proprio $u := \bar{v}_1, \bar{v}_2$. Pertanto, equazioni parametriche per U sono

$$X_1 = t + 2s, X_2 = 2t + s, X_3 = t + 3s, t, s \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana per U si può determinare eliminando i parametri t ed s dalle precedenti equazioni parametriche scalari, oppure considerando direttamente

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

che fornisce $5X_1 - X_2 - 3X_3 = 0$.

(ii) Il primo vettore della base ortogonale di U è \bar{v}_1 . Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt abbiamo inoltre

$$\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - \frac{\langle \bar{v}_1, \bar{v}_2 \rangle}{\|\bar{v}_1\|^2} \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -8/6 \\ 11/6 \end{pmatrix}.$$

La base ortogonale per U è quindi \bar{v}_1, \bar{w}_2 .

(iii) Per estendere la base ortogonale di U ad una base ortogonale di \mathbb{R}^3 si può semplicemente considerare che l'equazione cartesiana di U è $5X_1 - X_2 - 3X_3 = 0$. Poiché tale equazione stabilisce che tutti i vettori $(a, b, c) \in U$ sono tali da soddisfare

$$5a - b - 3c = 0, \forall (a, b, c) \in U$$

questo significa in particolare che un vettore perpendicolare ad U è :

$$\bar{w}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(iv) Si ha che $U^\perp = \text{Span}\{\bar{w}_3\}$ pertanto equazioni parametriche sono

$$X_1 = 5t, X_2 = -t, X_3 = -3t, t \in \mathbb{R}$$

ed equazioni cartesiane sono

$$3X_2 - X_3 = 0 = X_1 + 5X_2.$$

Esercizio 4. Sia \mathbb{R}^4 lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + X_4 = 0 \\ 2X_2 - X_4 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare una base ortonormale di U .

(ii) Determinare l'equazione cartesiana del complemento ortogonale U^\perp del sottospazio U .

(iii) Determinare una base ortonormale di U^\perp .

Svolgimento: (i) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U . Pertanto una base di U e' data da $\bar{u} = (1, 0, 1, 0)$. Quindi una base ortonormale di U e' data da $\bar{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$.

(ii) U^\perp e' costituito da tutti i vettori $\bar{t} = (x_1, \dots, x_4)$ tali che $\langle \bar{t}, \bar{u} \rangle = 0, \forall \bar{u} \in U$, cioe' tali che risulti:

$$X_1 + X_3 = 0.$$

Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U .

(iii) Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da

$$\bar{u}_2 = (1, 0, -1, 0), \quad \bar{u}_3 = (0, 1, 0, 0), \quad \bar{u}_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Pertanto $U^\perp = \text{Span}(\bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$ ritrovando che ha dimensione 3, cioe' che e' un iperpiano in \mathbb{R}^4 . La base ortonormale si puo' estrarre direttamente dalla precedente. Infatti basta prendere

$$\bar{f}_2 = \bar{u}_2/||\bar{u}_2||, \quad \bar{f}_3 = \bar{u}_3, \quad \bar{f}_4 = \bar{u}_4$$

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle, \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard \langle, \rangle , sia U il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

Sia P l'operatore lineare su \mathbb{R}^4 dato dalla proiezione ortogonale sul sottospazio U .

(i) Stabilire il rango di P .

(ii) Stabilire se P e' un operatore diagonalizzabile ed, in caso affermativo, trovare la sua forma diagonale in un opportuna base.

(ii) Determinare la matrice $M_e(P)$, cioe' la matrice rappresentativa dell'operatore P in base canonica e .

Svolgimento. (i) La codimensione di U in \mathbb{R}^4 e' 2, i.e. U e' un piano vettoriale. Pertanto P , essendo l'operatore di proiezione ortogonale su U ha necessariamente come immagine U , quindi P ha rango 2.

(ii) Dalle equazioni cartesiane di U si trova facilmente

$$U = \text{Span}\{\bar{u}_1 := \bar{e}_1, \bar{u}_2 := \bar{e}_2 + \bar{e}_3 - \bar{e}_4\}.$$

Di conseguenza $\text{Ker}(P) = U^\perp$ che e' definito da equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 + X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

Pertanto, si ha ad esempio che $U^\perp = \text{Span}\{\bar{u}_3 := -\bar{e}_2 + \bar{e}_3, \bar{u}_4 := \bar{e}_2 + \bar{e}_4\}$. Consideriamo allora $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^\perp$ con base u data da

$$u := \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4.$$

Per definizione di P , in base u si ha:

$$M_u(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi P e' diagonalizzabile, $M_u(P)$ e' la sua forma diagonale (in altri termini la base u e' una base diagonalizzante).

Esercizio 6. Sia \mathbb{R}^4 lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e di base canonica e . Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ X_1 - X_4 = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la dimensione di U^\perp , complemento ortogonale di U in \mathbb{R}^4 , ed una base di U^\perp .

(ii) Sia dato il vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di \mathbb{R}^4 , espresso in componenti rispetto alla base

canonica e . Determinare il vettore $\pi_U(\bar{v})$ ottenuto per *proiezione ortogonale* di \bar{v} sul sottospazio U (che per **definizione** e' il vettore ottenuto come somma di tutte le proiezioni ortogonali $\pi_{\bar{f}_i}(\bar{v})$, dove $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k, k = \dim(U)$, e' una base ortonormale di U).

(iii) Determinare $\|\bar{v} - \pi_U(\bar{v})\|$ e $\cos(\theta)$, dove θ denota l'angolo convesso tra i vettori \bar{v} e $\pi_U(\bar{v})$.

Svolgimento: (i) Poiche' $\dim(U) = 2$, necessariamente $\dim(U^\perp) = 4 - 2 = 2$. In effetti U^\perp e' generato dai vettori normali ai due iperpiani che costituiscono le equazioni

cartesiane di U . Quindi $U^\perp := \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) Una base per U e' data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Applicando il procedimento di

ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, una base ortonormale di U e' quindi $f := \bar{f}_1 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}. \text{ Pertanto}$$

$$\pi_U(\bar{v}) = \langle \bar{f}_1, \bar{v} \rangle \bar{f}_1 + \langle \bar{f}_2, \bar{v} \rangle \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$(iii) \|\bar{v} - \pi_U(\bar{v})\| = \frac{\sqrt{21}}{3} \text{ mentre } \cos(\theta) = \frac{\langle \bar{v}, \pi_U(\bar{v}) \rangle}{\|\bar{v}\| \|\pi_U(\bar{v})\|} = \frac{4}{30} \sqrt{30}.$$

Esercizio 7. Sia \mathbb{R}^3 lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e della base canonica e . Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito dalle equazioni parametriche

$$W : \begin{cases} X_1 = s \\ X_2 = s \\ X_3 = t \end{cases}, s, t \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver verificato che il vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non appartiene a W , determinare il

vettore *proiezione ortogonale* di \bar{v} sul sottospazio W (che per **definizione** e' il vettore ottenuto come somma di tutte le proiezioni ortogonali $\pi_{\bar{f}_i}(\bar{v})$, dove $\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_k$, $k = \dim(W)$, e' una base ortonormale di W).

Svolgimento. E' ovvio che \bar{v} non giace in W , dato che le sue componenti non soddisfano

le equazioni parametriche di W . Una base per W e' data dai vettori $\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{b}_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Facilmente si vede che tali vettori formano una base ortogonale per W . Le

proiezioni ortogonali di \bar{v} su tali vettori sono

$$\pi_{\bar{b}_1}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \pi_{\bar{b}_2}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\pi_W(\bar{v}) = \pi_{\bar{b}_1}(\bar{v}) + \pi_{\bar{b}_2}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$. In effetti $\bar{v} - \pi_W(\bar{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

che e' proporzionale al vettore normale a W .

Esercizio 8. Siano date le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che A e C hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(ii) Diagonalizzare A .

(iii) Triangolarizzare A mediante una base ortonormale.

(iv) Provare che C non e' diagonalizzabile.

(v) Triangolarizzare C tramite una base ortonormale.

Svolgimento. (i) Il polinomio caratteristico di entrambe le matrici e' $P(T) = (T - 3)(T - 2)^2$.

(ii) L'autovalore 3 e' semplice, pertanto $\mu_{g,A}(3) = 1$ ed un generatore per il suo autospazio e' $\bar{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolando invece la molteplicita' algebrica e geometrica per l'autovalore 2 si ha $\mu_{a,A}(2) = \mu_{g,A}(2) = 2$ ed una base per l'autospazio e' data da $\bar{v}_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\bar{v}_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Percio' A e' diagonalizzabile e, in base $v := \bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$, la matrice rappresentativa e'

$$\Delta = \text{Diag}(3 \ 2 \ 2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iii) Per triangolarizzare A mediante una base ortonormale, e' sufficiente ortonormalizzare i tre autovettori $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ trovati precedentemente. Utilizzando Gram-Schmidt si

ottengono cosi' tre vettori indipendenti $\bar{g}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_2 = \frac{\sqrt{2}}{20} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Denotata con G la matrice cambiamento di base dalla base canonica alla nuova base data dai vettori $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$, si ottiene

$$G^{-1}AG = \begin{pmatrix} 3 & * & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

con * opportuni valori (che non ci interessa esplicitare).

(iv) La matrice C non e' diagonalizzabile perche' $2 = \mu_{a,A}(2) > \mu_{g,A}(2) = 1$.

(v) Siano \bar{h}_1 un autovettore di C relativo all'autovalore 3 e \bar{h}_2 un autovettore relativo all'autovalore 3. Poiché autovettori relativi ad autovalori distinti, sono linearmente indipendenti.

Per triangolarizzare C prendiamo dapprima $\bar{w}_1 = \frac{1}{\|\bar{h}_1\|} \bar{h}_1$, cosicché $C\bar{w}_1 \in \text{Span}\{\bar{w}_1\}$. A questo punto, ortonormalizziamo la coppia $\{\bar{w}_1, \bar{h}_2\}$, ottenendo una coppia di vettori $\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$ per cui $C\bar{w}_2 \in \text{Span}\{\bar{w}_1, \bar{w}_2\}$. Infine, versorizzando $\bar{w}_1 \wedge \bar{w}_2$, si ottiene una base ortonormale $w = \bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3$; in base w la matrice associata a C è triangolare.