

Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Scienza e Tecnologia dei Media
Esercizi GEOMETRIA (I modulo)
SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI. PRODOTTO VETTORIALE IN \mathbb{R}^3 .
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Svolti

Esercizio 1. Nel piano vettoriale euclideo \mathbb{R}^2 , dotato della base canonica \mathcal{E} e del prodotto scalare standard \cdot , sia $U := \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e sia Π l'operatore lineare su \mathbb{R}^2 dato dalla *proiezione ortogonale* sul sottospazio U .

- (i) Determinare il polinomio caratteristico di Π , calcolando la molteplicita' algebrica e geometrica di ciascun autovalore di Π .
- (ii) Dedurre se Π e' diagonalizzabile o meno. In caso affermativo, dedurre la forma diagonale di Π .

Svolgimento. (i) Ovviamente si ha che un vettore ortogonale ai vettori di U e' $\bar{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se denotiamo con $W = \text{Span}\{\bar{w}\}$, W e' il *complemento ortogonale ad U* , in altri termini $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Sia $\mathcal{B} = \{\bar{u}, \bar{w}\}$ la base ortogonale di \mathbb{R}^2 . In tale base la matrice rappresentativa dell'operatore Π e' semplicemente

$$A = M_{\mathcal{B}}(\Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiche' il polinomio caratteristico di Π coincide con il polinomio caratteristico della matrice A , si ha immediatamente che

$$P_A(t) = t(t - 1).$$

Visto che entrambi gli autovalori sono semplici, si ha necessariamente $\mu_a(0) = \mu_g(0) = 1$ e $\mu_a(1) = \mu_g(1) = 1$.

- (ii) Visto che il polinomio caratteristico di Π si fattorizza linearmente su \mathbb{R} ed ha tutte soluzioni semplici, Π e necessariamente diagonalizzabile e la matrice A e' la sua forma diagonale.

Esercizio 2. Nel piano vettoriale euclideo \mathbb{R}^2 , munito di base canonica \mathcal{E} e di prodotto scalare standard \cdot , sia

$$\bar{v} = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2$$

e sia $U := \text{Lin}(\bar{v})$. Sia $\sigma_U \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ l'operatore di riflessione rispetto ad U .

- (i) Stabilire il rango di σ_U .

(ii) Stabilire se l'operatore σ_U e' diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare i suoi autovalori, specificando per ciascuno di essi la molteplicita' algebrica e geometrica. Scrivere esplicitamente il suo polinomio caratteristico.

(iii) Dedurre la forma diagonale di σ_U e determinare inoltre la matrice $M_{\mathcal{E}}(\sigma_U)$ che rappresenta l'operatore σ_U nella base canonica.

Svolgimento. (i) Sia \bar{w} un qualsiasi vettore ortogonale a \bar{v} . Per definizione di σ_U si ha

$$\sigma_U(\bar{v}) = \bar{v} \quad \sigma_U(\bar{w}) = -\bar{w}.$$

Pertanto $rg(\sigma_U) = 2$.

(ii) Gli autovalori di σ_U sono 1 e -1 , entrambi di molteplicita' algebrica e quindi geometrica 1. Il polinomio caratteristico e' quindi $P_{\sigma_U}(T) = T^2 - 1$.

(iii) La forma diagonale di σ_U e' $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se prendiamo una base ortonormale \mathcal{F} data da

$$\bar{f}_1 = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \frac{\bar{w}}{\|\bar{w}\|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

questa base definisce una matrice cambiamento di base $C = M_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$, tale che $C^{-1} = {}^t C$. Grazie a C abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}(\sigma_U) = CD {}^t C = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Nello piano vettoriale euclideo \mathbb{R}^2 , munito del prodotto scalare standard, si consideri il vettore $\bar{u} = (-1, 1)$, espresso in componenti rispetto alla base canonica \mathcal{E} .

Determinare tutti i vettori \bar{x} che sono ortogonali ad \bar{u} e che abbiano norma uguale a 2.

Svolgimento: $x = (x_1, x_2)$ e' tale che $0 = \langle u, x \rangle = x_2 - x_1$; percio' $x = (\alpha, \alpha)$. Inoltre $\|x\| = 2$ implica $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Percio', i vettori cercati sono

$$x = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{oppure} \quad x = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Esercizio 4. Nel piano vettoriale euclideo \mathbb{R}^2 , munito del prodotto scalare standard, si consideri il vettore $\bar{v} = (2, 1)$, espresso in componenti rispetto alla base canonica \mathcal{E} .

(i) Determinare le formule di proiezione ortogonale sul sottospazio $V := \text{Span}(\bar{v})$.

(ii) Determinare una base ortonormale \mathcal{O} di \mathbb{R}^2 , il cui primo vettore sia proporzionale a \bar{v} .

(iii) Detta $C = M_{\mathcal{E}, \mathcal{O}}$ la matrice cambiamento di base dalla base canonica \mathcal{E} alla nuova base ortonormale \mathcal{O} , verificare che $C = C^{-1}$.

Svolgimento: (i) Sia $\bar{x} = (x_1, x_2)$ un vettore arbitrario di \mathbb{R}^2 . Si ha pertanto

$$\Pi_V(\bar{x}) = \left(\frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2, \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2 \right).$$

(ii) Un vettore ortogonale a \bar{v} e' ad esempio il vettore $\bar{w} = (1, -2)$. La base \mathcal{O} cercata e' quindi

$$\bar{f}_1 = \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right), \quad \bar{f}_2 = \frac{\bar{w}}{\|\bar{w}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

(iii) Per definizione di matrice cambiamento di base, si ha

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Poiche' \mathcal{O} e' una base ortonormale, allora C e' una matrice ortogonale, i.e. ${}^t C = C^{-1}$. Notando che C e' simmetrica, allora $C = C^{-1}$.

Esercizio 5. Dati i vettori di \mathbb{R}^3

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori dati;

(ii) calcolare l'orientazione della terna ordinata $\{\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}\}$.

Svolgimento: (i) Il volume del parallelepipedo richiesto si trova calcolando il valore assoluto del determinante della matrice quadrata di ordine 3 che ha per colonne le coordinate della terna di vettori. Tale volume risulta uguale ad 1.

(ii) Il valore del determinante della matrice associata alla terna ordinata $\{\bar{y}, \bar{x}, \bar{z}\}$ e' -1; segue che la terna ordinata e' una base non equiorientata (o equiversa) alla base canonica di \mathbb{R}^3 .

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^3 , sia dato il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$U : X_1 - X_2 = 0.$$

Determinare una base ortonormale b di \mathbb{R}^3 , orientata positivamente ed i cui primi due versori appartengano al sottospazio U .

Svolgimento: Notiamo che U e' un piano vettoriale, cioe' e' un sottospazio di \mathbb{R}^3 di dimensione 2. Una base naturale per U e' data dai vettori:

$$\bar{v} = (1, 1, 0), \quad \bar{w} = (0, 0, 1)$$

(le cui coordinate sono scritte per riga per brevitaa'). Notiamo che

$$\langle \bar{v}, \bar{w} \rangle = 0$$

e che \bar{w} e' gia' un versore. Percio' per determinare una base ortonormale di U , basta versorizzare \bar{v} e si ottiene:

$$\bar{f}_1 := \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 := \bar{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b . Per determinare il terzo vettore di b , basta considerare

$$\bar{f}_3 := \bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) = \|\bar{f}_3\|^2 = 1.$$

Esercizio 7. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^3 , sia dato il sottospazio vettoriale U , di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_2 + X_3 = 0 \end{cases}.$$

Determinare una base ortonormale b' di \mathbb{R}^3 , orientata positivamente ed il cui primo versore appartenga al sottospazio U .

Svolgimento: Notiamo che U e' una retta vettoriale. Un vettore direttore di U , i.e. una base di U , si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce U . Ad esempio, una soluzione e' data dal vettore

$$\bar{v} = (1, -1, 1).$$

Percio', versorizzando \bar{v} si ottiene:

$$\bar{f}_1 := \frac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora scegliere opportunamente un vettore di \mathbb{R}^3 che sia manifestamente ortogonale ad U , ad esempio

$$\bar{w} = (1, 1, 0).$$

Percio', versorizzando \bar{w} otteniamo:

$$\bar{f}_2 = \frac{\bar{w}}{\|\bar{w}\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b' . Per determinare il terzo vettore della base b' , basta considerare

$$\bar{f}_3 := \bar{f}_1 \wedge \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) = \|\bar{f}_3\|^2 = 1.$$

Esercizio 8. (i) Si consideri \mathbb{R}^3 come spazio vettoriale euclideo, munito della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$X_1 - X_3 = 0.$$

Determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^3 , positivamente orientata, i cui primi due versori appartengano ad U .

(ii) Si consideri ora \mathbb{R}^3 come spazio cartesiano, con riferimento cartesiano standard $(O; x_1, x_2, x_3)$. Determinare l'equazione cartesiana del piano π , passante per il punto

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ parallelo alla retta } r, \text{ di equazioni cartesiane}$$

$$\begin{cases} X_1 - 3X_3 = 1 \\ X_2 + X_3 = 3 \end{cases},$$

e perpendicolare al piano α di equazione cartesiana

$$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 = 1.$$

Scrivere infine l'equazione cartesiana di una qualsiasi retta che sia sghemba alla retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}.$$

Svolgimento: (i) Dall'equazione di U , abbiamo che una base di U e' ad esempio

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due vettori sono gia' ortogonali. Pertanto, basta considerare

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il terzo versore della base ortonormale positivamente orientata sara' dato da

$$\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) Il piano richiesto deve contenere nella sua giacitura un vettore direttore di r ed un vettore normale al piano α . Pertanto, detto \underline{v} un vettore direttore di r e \underline{n} un vettore normale a α , un vettore normale a π e' il vettore

$$\underline{n}' = \underline{v} \wedge \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di π e' della forma

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 + k = 0.$$

Il passaggio per P fornisce l'equazione

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 - 13 = 0.$$

Per determinare una qualsiasi retta sghemba a s , prendiamo un qualsiasi piano parallelo ad esempio a $X_1 - X_3 = 1$, sia questo ad esempio

$$X_1 - X_2 = 2.$$

In seguito, consideriamo un piano non parallelo a $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ e che non contenga s , ad esempio $X_3 = 1$. Infatti, mettendo a sistema le equazioni cartesiane di s con $X_3 = 1$ troviamo un unico punto di intersezione, pertanto $X_3 = 1$ non contiene s . In definitiva, la retta data da

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 2 \\ X_3 = 1 \end{cases},$$

e' sicuramente sghemba a s , dato che essa non e' parallela a s ed e' contenuta in un piano parallelo ad uno dei due che determinano s .