Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Scienza e Tecnologia dei Media
Esercizi GEOMETRIA (I modulo)
SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI. PRODOTTO VETTORIALE IN $\mathbb{R}^3$.
Docente: Prof. F. Flamini

<u>Esercizi Svolti</u>

Esercizio 1. Nel piano vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, dotato della base canonica $\mathcal{E}$ e del prodotto scalare standard $\cdot$, sia $U := Span \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e sia Π l'operatore lineare su $\mathbb{R}^2$ dato dalla *proiezione ortogonale* sul sottospazio U.
(i) Determinare il polinomio caratteristico di Π, calcolando la molteplicita' algebrica e geometrica di ciascun autovalore di Π.
(ii) Dedurre se Π e' diagonalizzabile o meno. In caso affermativo, dedurre la forma diagonale di Π.

Svolgimento. (i) Ovviamente si ha che un vettore ortogonale ai vettori di U e' $\overline{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se denotiamo con $W = Span\{\overline{w}\}$, W e' il *complemento ortogonale ad* U, in altri termini $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.

Sia $\mathcal{B} = \{\overline{u}, \overline{w}\}$ la base ortogonale di $\mathbb{R}^2$. In tale base la matrice rappresentativa dell'operatore Π e' semplicemente

$$A = M_{\mathcal{B}}(\Pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiche' il polinomio caratteristico di Π coincide con il polinomio caratteristico della matrice A, si ha immediatamente che

$$P_A(t) = t(t-1).$$

Visto che entrambi gli autovalori sono semplici, si ha necessariamente $\mu_a(0) = \mu_g(0) = 1$ e $\mu_a(1) = \mu_g(1) = 1$.
(ii) Visto che il polinomio caratteristico di Π si fattorizza linearmente su $\mathbb{R}$ ed ha tutte soluzioni semplici, Π e necessariamente diagonalizzabile e la matrice A e' la sua forma diagonale.

Esercizio 2. Nel piano vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, munito di base canonica $\mathcal{E}$ e di prodotto scalare standard $\cdot$, sia

$$\overline{v} = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2$$

e sia $U := Span(\overline{v})$. Sia $\sigma_U \in End(\mathbb{R}^2)$ l'operatore di riflessione rispetto ad U.
(i) Stabilire il rango di σ_U.

(ii) Stabilire se l'operatore σ_U e' diagonalizzabile. In caso affermativo, determinare i suoi autovalori, specificando per ciascuno di essi la molteplicita' algebrica e geometrica. Scrivere esplicitamente il suo polinomio caratteristico.
(iii) Dedurre la forma diagonale di σ_U e determinare inoltre la matriche $M_{\mathcal{E}}(\sigma_U)$ che rappresenta l'operatore σ_U nella base canonica.

Svolgimento. (i) Sia $\overline{w}$ un qualsiasi vettore ortogonale a $\overline{v}$. Per definizione di riflessione, per σ_U si ha

$$\sigma_U(\overline{v}) = \overline{v} \quad \sigma_U(\overline{w}) = -\overline{w}.$$

Pertanto $rg(\sigma_U) = 2$.
(ii) Gli autovalori di σ_U sono 1 e -1, entrambi di molteplicita' algebrica e quindi geometrica 1. Il polinomio caratteristico e' quindi $P_{\sigma_U}(T) = T^2 - 1$.
(iii) La forma diagonale di σ_U e' $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Se prendiamo una base ortonormale $\mathcal{F}$ data da

$$\overline{f}_1 = \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \; \overline{f}_2 = \frac{\overline{w}}{||\overline{w}||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

questa base definisce una matrice cambiamento di base $C = M_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, tale che $C^{-1} = {}^tC$. Grazie a C abbiamo

$$M_{\mathcal{E}}(\sigma_U) = CD\,{}^tC = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Nello piano vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, munito del prodotto scalare standard, si consideri il vettore $\overline{u} = (-1, 1)$, espresso in coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Determinare tutti i vettori $\overline{x}$ che sono ortogonali ad $\overline{u}$ e che abbiano norma uguale a 2.

Svolgimento: $x = (x_1, x_2)$ e' tale che $0 = \langle u, x \rangle = x_2 - x_1$; percio' $x = (\alpha, \alpha)$. Inoltre $||x|| = 2$ implica $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Percio', i vettori cercati sono

$$x = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \;\text{ oppure }\; x = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Esercizio 4. Nel piano vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, munito del prodotto scalare standard, si consideri il vettore $\overline{v} = (2, 1)$, espresso in coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$.
(i) Determinare le formule di proiezione ortogonale sul sottospazio $V := Span(\overline{v})$.
(ii) Determinare una base ortonormale $\mathcal{O}$ di $\mathbb{R}^2$, il cui primo vettore sia proporzionale a $\overline{v}$.
(iii) Detta $C = M_{\mathcal{E},\mathcal{O}}$ la matrice cambiamento di base dalla base canonica $\mathcal{E}$ alla nuova base ortonormale $\mathcal{O}$, verificare che $C = C^{-1}$.

Svolgimento: (i) Sia $\overline{x} = (x_1, x_2)$ un vettore arbitrario di $\mathbb{R}^2$. Si ha pertanto

$$\Pi_V(\overline{x}) = \left(\frac{4}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2, \; \frac{2}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2\right).$$

(ii) Un vettore ortogonale a $\overline{v}$ e' ad esempio il vettore $\overline{w} = (1, -2)$. La base $\mathcal{O}$ cercata e' quindi

$$\overline{f}_1 = \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \quad \overline{f}_2 = \frac{\overline{w}}{||\overline{w}||} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

(iii) Per definizione di matrice cambiamento di base, si ha

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Notiamo che ${}^tC = C^{-1}$. Notando che C e' anche simmetrica, allora $C = C^{-1}$, come dovevassi dimostrare.

Esercizio 5. Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori dati;
(ii) calcolare l'orientazione della terna ordinata $\{\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}\}$.

Svolgimento: (i) Il volume del parallelepipedo richiesto si trova calcolando il valore assoluto del determinante della matrice quadrata di ordine 3 che ha per colonne le coordinate della terna di vettori. Tale volume risulta uguale ad 1.
(ii) Il valore del determinante della matrice associata alla terna ordinata $\{\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}\}$ e' - 1; segue che la terna ordinata e' una base non equiorientata (o equiversa) alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, sia dato il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$U : \ X_1 - X_2 = 0.$$

Determinare una base ortonormale b di $\mathbb{R}^3$, orientata positivamente ed i cui primi due versori appartengano al sottospazio U.

Svolgimento: Notiamo che U e' un piano vettoriale, cioe' e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Una base naturale per U e' data dai vettori:

$$\overline{v} = (1, 1, 0), \quad \overline{w} = (0, 0, 1)$$

(le cui coordinate sono scritte per riga per brevita'). Notiamo che

$$\langle \overline{v}, \overline{w} \rangle = 0$$

e che $\overline{w}$ e' gia' un versore. Percio' per determinare una base ortonormale di U, basta versorizzare $\overline{v}$ e si ottiene:

$$\overline{f}_1 := \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 := \overline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b. Per determinare il terzo vettore di b, basta considerare

$$\overline{f}_3 := \overline{f}_1 \wedge \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = ||\overline{f}_3||^2 = 1.$$

Esercizio 7. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, sia dato il sottospazio vettoriale U, di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 & = & 0 \\ X_2 + X_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Determinare una base ortonormale b' di $\mathbb{R}^3$, orientata positivamente ed il cui primo versore appartenga al sottospazio U.

Svolgimento: Notiamo che U e' una retta vettoriale. Un vettore direttore di U, i.e. una base di U, si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce U. Ad esempio, una soluzione e' data dal vettore

$$\overline{v} = (1, -1, 1).$$

Percio', versorizzando $\overline{v}$ si ottiene:

$$\overline{f}_1 := \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora scegliere opportunamente un vettore di $\mathbb{R}^3$ che sia manifestamente ortogonale ad U, ad esempio

$$\overline{w} = (1, 1, 0).$$

Percio', versorizzando $\overline{w}$ otteniamo:

$$\overline{f}_2 = \frac{\overline{w}}{||\overline{w}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b'. Per determinare il terzo vettore della base b', basta considerare

$$\overline{f}_3 := \overline{f}_1 \wedge \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = ||\overline{f}_3||^2 = 1.$$

Esercizio 8. (i) Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale euclideo, munito della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$X_1 - X_3 = 0.$$

Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, positivamente orientata, i cui primi due versori appartengano ad U.

Svolgimento: Dall'equazione di U, abbiamo che una base di U e' ad esempio

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due vettori sono gia' ortogonali. Pertanto, basta considerare

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \ \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il terzo versore della base ortonormale positivamente orientata sara' dato da

$$\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$