Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Scienza e Tecnologia dei Media
Esercizi GEOMETRIA (I modulo)
DIAGONALIZZAZIONE
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Svolti

Esercizio 1. Sia T l'operatore lineare sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$ è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ parametri indipendenti.
(i) Determinare i valori di a, b e c per cui T risulti essere diagonalizzabile.
(ii) Per siffatti valori, determinare una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^4$ diagonalizzante per T, scrivendo esplicitamente la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$.

Svolgimento: (i) Dal testo dell'esercizio, abbiamo che $A := M_{\mathcal{E}}(T)$. Per calcolare il polinomio caratteristico $P_T(t) \in \mathbb{R}[t]$ dell'operatore T, basta calcolare il polinomio $P_A(t)$, visto che $P_T(t)$ e' invariante sulle classi di coniugio di matrici rappresentanti T.

Si ha
$$P_A(t) = t^2(1-t)^2.$$
L'operatore T ha quindi due autovalori distinti: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, entrambi di molteplicità algebrica 2, i.e.
$$\mu_a(0) = 2 \quad \text{e} \quad \mu_a(1) = 2.$$
L'operatore T sarà quindi diagonalizzabile se, e solo se,
$$\mu_g(0) = 2 \quad \text{e} \quad \mu_g(1) = 2.$$
L'autospazio $W_0(T)$, relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$ (che scegliamo come primo autovalore di T) non e' altro che $Ker(T)$. Quindi si deve risolvere il sistema omogeneo:
$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 + aX_4 & = & 0 \\ 2X_3 + bX_4 & = & 0 \\ X_3 + cX_4 & = & 0 \end{cases}$$
Denotata con B la matrice dei coefficienti del precedente sistema, dal Teorema di Nullita' piu' Rango sappiamo che
$$\mu_g(0) = 4 - rg(B).$$
Pertanto, $\mu_g(0) = 2$ se, e solo se, $rg(B) = 2$.

Per il Teorema di Kronecher, imponendo a tutte le sottomatrici quadrate di ordine 3 di B di avere determinate nullo, si ottiene che
$$rg(B) = 2 \Leftrightarrow b = 2c.$$

Per determinare l'autospazio $W_1(T)$, relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$, si deve risolvere il sistema omogeneo che determina $Ker(T - 2Id)$:

$$\begin{cases} -X_2 + 2X_3 + aX_4 & = & 0 \\ -X_2 + 2X_3 + bX_4 & = & 0 \\ cX_4 & = & 0 \\ -X_4 & = & 0 \end{cases}$$

Denotata con C la matrice dei coefficienti del precedente sistema, vediamo che $rg(C) = 2$ qualunque siano i valori di a, b e c. Pertanto, dalla relazione

$$\mu_g(1) = 4 - rg(C)$$

si ha sempre $\mu_g(1) = 2$.
In conclusione, T è diagonalizzabile se, e solo se, i parametri a, b, c sono t.c.

$$b = 2c.$$

(ii) Se in A andiamo a sostituire $b = 2c$ e calcoliamo basi dei relativi autospazi, abbiamo che

$$W_0(T; a, c) = Span((1, 1, 0, 0),\ (0, a - 2c, -c, 1))$$

e

$$W_1(T; a, c) = Span((1, 0, 0, 0),\ ((0, 2, 1, 0)).$$

Quali che siano i valori di $a, c \in \mathbb{R}$, i quattro vettori sopra descritti costituiscono sempre una base $\mathcal{B}_{a,c}$ per $\mathbb{R}^4$, con a, c variabili in $\mathbb{R}$. In ciascuna di queste basi $\mathcal{B}_{a,c}$, abbiamo sempre

$$M_{\mathcal{B}_{a,c}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia T l'operatore lineare su $\mathbb{R}^3$ la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.
(i) Determinare gli autovalori di T ed i rispettivi autospazi, specificando per ogni autovalore la molteplicità geometrica ed algebrica.
(ii) Stabilire se T è diagonalizzabile ed, in caso affermativo, trovare una base $\mathcal{B}$ per $\mathbb{R}^3$ di autovettori di T e la matrice $M_{\mathcal{B}}(T)$. In caso contrario, determinare il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dagli autovettori di T.

Svolgimento. Come sopra, per calcolare $P_T(t)$ basta calcolare $P_A(t)$, che e'

$$P_A(t) = (t + 1)^2(t + 2).$$

L'operatore T ha quindi due autovalori distinti: $\lambda_1 = -1$, di molteplicità algebrica $\mu_a(-1) = 2$, e $\lambda_2 = -2$, di molteplicità algebrica $\mu_a(-2) = 1$.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$, che scegliamo come primo autovalore, si deve risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_3 &= 0 \\ X_1 + 2X_3 &= 0 \\ X_1 + 2X_3 &= 0 \end{cases}$$

Il rango della matrice dei coefficienti del sistema è manifestamente 2. Quindi $dim\, W_{-1}(T) = 3 - 2 = 1$. Infatti, questo sistema fornisce l'unico autovettore $\overline{v}_1 = (-2, -1, 1)$, le cui coordinate sono rispetto alla base canonica e di $\mathbb{R}^3$. Quindi $\mu_g(-1) = 1$.
Poiché l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è un'autovalore semplice, possiamo affermare con certezza che $\mu_g(-2) = 1$. Infatti, l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = -2$ si determina mediante il sistema

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 3X_3 &= 0 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 &= 0 \\ -X_1 - X_3 &= 0 \end{cases}$$

Questo sistema fornisce l'autovettore

$$\overline{v}_2 = (1, 1, -1).$$

(ii) Poiché $\mu_g(\lambda_1) < \mu_a(\lambda_1)$, l'operatore T non può essere diagonalizzabile. In effetti, entrambi gli autospazi erano delle rette vettoriali di $\mathbb{R}^3$, quindi non può esistere una base per $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di T, dato che i due autovettori di T generano solmente il piano vettoriale

$$Span(\overline{v}_1, \overline{v}_2).$$

Esercizio 3. Si consideri l'operatore lineare $F \in End(\mathbb{R}^3)$, la cui matrice rappresentativa nella base canonica e':

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che A ammette come autovalore $\lambda = 0$ con molteplicita' algebrica 1.
(ii) Senza svolgere conti, dedurre da (i) la dimensione di $Ker(F)$.
(iii) Dato $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, stabilire se $\overline{b}$ appartiene a $Im(F)$ ed, in caso affermativo, determinare la fibra di $\overline{b}$, i.e. $F^{-1}(\overline{b})$ insieme delle controimmagini del vettore $\overline{b}$.
Svolgimento. (i) Notiamo che A e' una matrice antisimmetrica. Pertanto $\det(A) = tr(A) = 0$. Per definizione di polinomio caratteristico, abbiamo allora che $PA(t)$ e' della forma $P_A(t) = t^3 - ct$ con $c \neq 0$ altrimenti A sarebbe la matrice nulla. Pertanto $\lambda = 0$ e' uno zero semplice di $P_A(t)$.
(ii) Il $Ker(F)$ non e' altro che l'autospazio relativo all'autovalore nullo. Poiche' tale autovalore e' semplice, necessariamente si deve avere $\dim(Ker(F)) = 1$.

(iii) Considerando la matrice completa C ottenuta orlando A con la colonna data dal vettore $\overline{b}$, si ottiene facilmente che $rg(A) = rg(C) = 2$. In effetti il vettore $\overline{b}$ e' la somma delle 3 colonne di A, quindi necessariamente $\overline{b} \in Im(F)$. Per determinare l'insieme delle controimmagini si deve risolvere il sistema lineare di tre equazioni e tre indeterminate

$$-X_2 + 2X_3 = 1 \quad X_1 + X_3 = 4 \quad -2X_1 - 3X_2 = -5.$$

Il sistema lineare e' sicuramente compatibile e di rango 2, pertanto dal teorema di Rouche'-Capelli, le sue soluzioni dipenderanno da 3-2 = 1 parametro libero. In altri termini esisteranno ∞^1 vettori nel dominio che hanno come immagine $\overline{b}$. Possiamo porre $X_3 = t$ ottenendo cosi' che il generico vettore nell'insieme $F^{-1}(\overline{b})$ e' della forma:

$$\begin{pmatrix} 4-3t \\ -1+2t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5. Considerato lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, dotato della base canonica $\mathcal{E}$, sia F l'operatore lineare su $\mathbb{R}^3$ definito da

$$F(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) = 4\overline{e}_2, \ \ F(2\overline{e}_2) = 7\overline{e}_2, \ \ F(\overline{e}_2 + 3\overline{e}_3) = 3\overline{e}_1 + 5\overline{e}_2 + 6\overline{e}_3.$$

(i) Determinare la matrice $A := M_{\mathcal{E}}(F)$, che rappresenta l'operatore F in base canonica, e la dimensione dei sottospazi $Ker(F)$ e $Im(F)$.
(ii) Determinare gli autovalori di F, specificando per ogni autovalore la molteplicità geometrica ed algebrica. Dedurre se F è diagonalizzabile.
(iii) Se F risulta diagonalizzabile, trovare una base $\mathcal{D}$ diagonalizzante F, scrivere la matrice $M_{\mathcal{D}}(F)$ che rappresenta l'operatore nella base $\mathcal{D}$.
(iv) Scrivere la relazione che lega le due matrici A e $M_{\mathcal{D}}(F)$.

Svolgimento. (i) Sfruttando la linearita' di F, troviamo che

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Poiche' le prime 2 righe di A sono indipendenti, ma la I e la III riga sono proporzionali, deduciamo che $rg(A) = 2$, quindi $\dim(Im(F)) = 2$. Dal Teorema di Nullita' + Rango, si ottiene che $\dim(Ker(F)) = 3 - 2 = 1$.
(ii) Dalla teoria generale, sappiamo che il polinomio caratteristico di un operatore lineare è invariante rispetto ai cambiamenti di base. Pertanto, per calcolare $P_F(t)$ basta calcolare $P_A(t)$. Questo polinomio è

$$P_A(t) = t(t-2)(\frac{7}{2} - t).$$

L'operatore F ha quindi tre autovalori semplici. Pertanto per ogni autovalore λ di F si ha necessariamente

$$\mu_a(\lambda) = \mu_g(\lambda) = 1.$$

(iii) Poiche' ogni autovalore e' semplice, F e' sicuramente diagonalizzabile. Determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 0$ equivale a trovare una base del $Ker(F)$; pertanto il sistema omogeneo $A\overline{x} = \overline{0}$ ha spazio di soluzioni generato dal vettore

$$\overline{v}_1 = (7, -1, 0).$$

Procedendo in modo analogo, si vanno a risolvere i sistemi lineari

$$A\overline{x} = 2\overline{x} \quad \text{e} \quad A\overline{x} = \frac{7}{2}\overline{x}$$

che forniscono come generatori dei rispettivi spazi di soluzioni i vettori

$$\overline{v}_2 = (1, -1, 2) \quad \text{e} \quad \overline{v}_3 = (0, 1, 0).$$

In tale base $\mathcal{B}$ (con tale ordine), la matrice $M_{\mathcal{B}}(F)$ e' la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

(iv) Se denotiamo con $M = M_{e,v}$ la matrice cambiamento di base dalla base canonica alla base diagonalizzante, si ha $D = M^{-1}AM$.