Geometria 3 a.a. 2019-20
Docente: Prof.ssa F. Tovena - Codocente: Prof. F. Flamini
Prima Prova di Esonero

Riportare in dettaglio lo svolgimento degli esercizi, motivando con chiarezza i passaggi svolti.

1) Si consideri lo spazio topologico $(\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{\text{Eucl}})$, dove $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$ la topologia euclidea e si denoti con $\mathbf{Z}$ il sottoinsieme dei numeri interi. Sia assegnato il sottoinsieme

$$A := (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z} \ .$$

Determinare, per il sottoinsieme A, la chiusura $\overline{A}$, l'interno $\overset{o}{A}$, la frontiera ∂A, il derivato $D(A)$, l'insieme dei punti isolati A^*.

2) Sia dato lo spazio topologico $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$, dove $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$ la topologia di Sorgenfrey (o del limite inferiore) che ha come base gli intervalli della forma $[s, t)$ con $s < t \in \mathbf{R}$. Sia $\mathbf{N}$ l'insieme dei numeri interi $n \geq 1$.

(2.a) Dato il sottoinsieme $S := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\}$, determinare $\overline{S}^{sorg}$, i.e. la chiusura di S in $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$.

(2.b) Data la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ con $x_n := \frac{n}{n+1}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, stabilire se essa ammette limite in $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$ e, in caso di risposta affermativa, stabilire se tale limite è unico.

(2.c) Dato il sottospazio $K := \left\{ -\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N} \right\} \cup \{0\}$, stabilire se K è compatto in $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$.

3) Si consideri lo spazio topologico $(\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{\text{Eucl}})$, dove $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$ la topologia euclidea. Sia assegnato il sottoinsieme

$$B := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}.$$

(3.a) Stabilire se B è chiuso e se B è compatto.

(3.b) Considerando su B la struttura di sottospazio topologico, dimostrare che il sottospazio B è omeomorfo a $S^1 \times [0, 1]$, ove $S^1 := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(3.c) Denotiamo con $\chi : (\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{\text{Eucl}}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{1,\text{Eucl}})$ la funzione caratteristica dell'insieme B, che ha come codominio la retta euclidea ed è definita come:

$$\chi(p) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p \notin B \\ 1 & \text{se} \quad p \in B \end{cases} .$$

Determinare il sottoinsieme D dei punti di $\mathbf{R}^2$ nei quali l'applicazione χ non è continua.

Svolgimenti

1) *Si consideri lo spazio topologico* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{\text{Eucl}})$, *dove* $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$ *la topologia euclidea e si denoti con* $\mathbf{Z}$ *il sottoinsieme dei numeri interi. Sia assegnato il sottoinsieme*

$$A := (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z} \ .$$

Determinare, per il sottoinsieme A, *la chiusura* $\overline{A}$, *l'interno* $\overset{o}{A}$, *la frontiera* ∂A, *il derivato* $D(A)$, *l'insieme dei punti isolati* A^*.

Svolgimento: Per quanto visto a lezione, la topologia euclidea $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$) su $(\mathbf{R}^2)$ coincide con il prodotto delle topologie euclidee sui fattori $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{1,\text{Eucl}})$. Nelle esercitazioni, si è verificato che, per ogni coppia di spazi topologici $(X, \mathcal{U}_X)$ e $(Y, \mathcal{U}_Y)$ e per ogni coppia di sottoinsiemi $S \subseteq X$ e $Y \subseteq Y$, allora:

$$(S \times T)^o = \overset{o}{S} \times \overset{o}{T}, \qquad \overline{S \times T} = \overline{S} \times \overline{T}.$$

Osserviamo che, nella retta reale con topologia euclidea:

- $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})^o = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$ perché $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})$ è aperto, essendo unione degli intervalli aperti $(z, z+1)$ al variare di $z \in \mathbf{Z}$;
- $\overset{o}{\mathbf{Z}} = \emptyset$ perché la topologia euclidea induce su $\mathbf{Z}$ la topologia discreta: infatti, se $z \in \mathbf{Z}$, si ha che l'intervallo reale aperto $(z - 1/2, z + 1/2)$ interseca $\mathbf{Z}$ solo in z, che quindi è aperto;
- $\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}} = \mathbf{R}$ perché ogni sottoinsieme è contenuto nella propria chiusura, $\mathbf{R}$ è chiuso e ogni punto $z \in \mathbf{Z}$ appartiene alla chiusura $\overline{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}}$: infatti, è sufficiente osservare che, per ogni reale $\varepsilon \in (0, 1)$, l'intervallo aperto è aperto $(z - \varepsilon, z + \varepsilon)$ contiene il punto $z + \varepsilon/2$ di $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ e che ogni intorno aperto di z nella topologia euclidea contiene un tale intervallo.
- $\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$ perché per quanto visto al primo punto, il sottoinsieme $\mathbf{Z}$ è chiuso, avendo complementare $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ aperto.

Pertanto,

$$((\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z})^o = \overset{o}{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}} \times \overset{o}{\mathbf{Z}} = (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \times \emptyset = \emptyset$$
$$\overline{(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}) \times \mathbf{Z}} = \overline{(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z})} \times \overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$$

Inoltre, per quanto visto a lezione, $\partial A = \overline{A} \setminus (\overset{o}{A})$ e dunque, $\partial A = \overline{A} = \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$. Infine, il derivato $D(A)$ coincide con la chiusura $\mathbf{R} \times \mathbf{Z}$: infatti, ogni punto $(x, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{Z}$ appartiene a $\mathbf{R} \times \{z\}$ che è omeomorfo a $\mathbf{R}$ con topologia euclidea, e quindi è composto unicamente da punti di accumulazione.

2) *Sia dato lo spazio topologico* $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$, *dove* $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$ *la topologia di Sorgenfrey (o del limite inferiore) che ha come base gli intervalli della forma* $[s, t)$ *con* $s < t \in \mathbf{R}$. *Sia* $\mathbf{N}$ *l'insieme dei numeri interi* $n \geq 1$.

(2.a) Dato il sottoinsieme $S := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\}$, *determinare* $\overline{S}^{sorg}$, *i.e. la chiusura di* S *in* $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$.

(2.b) Data la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}} := \left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n \in \mathbf{N}}$, *stabilire se ammette limite in* $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$ *e, in caso di risposta affermativa, stabilire se tale limite è unico.*

(2.c) Dato il sottospazio $K := \left\{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\right\} \cup \{0\}$, *stabilire se* K *è compatto in* $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$.

Svolgimento: Ricordiamo che, per quanto visto in classe, la topologia euclidea $\mathcal{U}_{1,\text{Eucl}}$ è strettamente meno fine della topologia $\mathcal{U}_{\text{Sorg}}$.

(2.a) Osserviamo che 0 è aderente a S: infatti, per definizione di base, per ogni aperto $U \in \mathcal{U}_{\text{Sorg}}$ di $\overline{S}^{sorg}$ contenente 0, esistono $s < t \in \mathbf{R}$ tali che $0 \in [s,t) \subseteq U$: preso $n \in \mathbf{N}$ con $1/n < t$, si ha che $1/n \in S \cap U$, che dunque risulta non vuoto. Dunque, $S \cup \{0\} \subseteq \overline{S}^{sorg}$. Ma $S \cup \{0\}$ è chiuso e quindi tutti i punti aderenti a S appartengono a $S \cup \{0\}$; infatti, sia $x \notin (S \cup \{0\})$: se $x < 0$ allora $(-\infty, x/2) \cap (S \cup \{0\}) = \emptyset$; se $x > 1$ allora $[\frac{x-1}{2}, +\infty) \cap (S \cup \{0\}) = \emptyset$; se, infine, $0 < x < 1$ allora esiste n_0 con $\frac{1}{n_0+1} < x < \frac{1}{n_0}$ e esiste numero reale $\varepsilon > 0$ tale che $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0})$ e quindi $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (S \cup \{0\}) = \emptyset$. Dunque, $\overline{S}^{sorg} = S \cup \{0\}$.

(2.b) Osserviamo che la funzione reale definita per numeri reali strettamente positivi $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ è strettamente crescente, perché la sua derivata $\frac{1}{(x+1)^2}$ è strettamente positiva. I termini della successione, al variare di n, sono quindi tra loro distinti. Mostriamo che la successione non ammette limite. Infatti, per assurdo, sia $a = \lim_{n\in\mathbf{N}} \frac{n}{n+1}$: per quanto osservato, ogni intorno aperto di a deve contenere infiniti elementi della successione. Se $a \geq 1$, l'intorno aperto $[a, a+1)$ non contiene elementi della successione, e abbiamo un assurdo. Se $a < 0$, l'intorno aperto $(-\infty, 0)$ non contiene elementi della successione, e abbiamo nuovamente un assurdo. Se, infine, $0 \leq a < 1$, l'intorno aperto $[a, \frac{1-a}{2})$ contiene solo un numero finito di elementi della successione: infatti, $\frac{n}{n+1} < \frac{1-a}{2} \iff 2n < (n+1)(1-a) \iff 2n < n+1-na-a \iff n+na < 1-a \iff n < \frac{1-a}{1+a}$. Pertanto, in $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{\text{Sorg}})$ la successione non ammette limite.

(2.c) Il sottospazio K non è compatto, perché il ricoprimento aperto di K

$$\mathcal{F} = \left\{(-\infty, -\frac{1}{n})\right\}_{n\in\mathbf{N}} \cup \{[0,1)\}$$

non ammette sottoricoprimento finito.

3) *Si consideri lo spazio topologico* $(\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{\text{Eucl}})$*, dove* $\mathcal{U}_{\text{Eucl}}$ *la topologia euclidea. Sia assegnato il sottoinsieme*

$$B := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}.$$

(3.a) Stabilire se B *è chiuso e se* B *è compatto.*

(3.b) Considerando su B *la struttura di sottospazio topologico, dimostrare che il sottospazio* B *è omeomorfo a* $S^1 \times [0,1]$*, ove* $S^1 := \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

(3.c) Denotiamo con $\chi : (\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{\text{Eucl}}) \to (\mathbf{R}, \mathcal{U}_{1,\text{Eucl}})$ *la funzione caratteristica dell'insieme* B*, che ha come codominio la retta euclidea ed è definita come:*

$$\chi(p) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p \notin B \\ 1 & \text{se} \quad p \in B \end{cases}.$$

Determinare il sottoinsieme D *dei punti di* $\mathbf{R}^2$ *nei quali l'applicazione* χ *non è continua.*

Svolgimento:

(3.a) Il sottoinsieme B è una corona circolare. Il sottoinsieme B è chiuso perché antiimmagine dell'intervallo chiuso $[a^2, b^2]$ tramite l'applicazione continua data dalla norma euclidea. Inoltre, B è limitato perché è contenuto nel disco di raggio b centrato nell'origine. Per la caratterizzazione dei sottospazi compatti di $(\mathbf{R}^2, \mathcal{U}_{\text{Eucl}})$, il sottospazio B è compatto in quanto chiuso e limitato.

(3.b) A lezione abbiamo considerato l'omeomorfismo tra sottospazi euclidei $\Psi : \mathbf{R}^2 \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}_{>0}$, definito ponendo $\Psi(\underline{x}) := (\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}, |\underline{x}|)$. Osservando che $\underline{x} \in B \iff a \leq |\underline{x}| \leq b$ e restringendo Ψ a B e alla sua immagine, troviamo un omeomorfismo $\Psi_{|B} : B \to \mathbf{S}^1 \times [a,b]$, $\Psi_{|B}(\underline{x}) := (\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}, |\underline{x}|)$

Abbiamo inoltre visto che, in $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{1\text{Eucl}})$, l'intervallo chiuso $[a, b]$ è omeomorfo all'intervallo chiuso $[0, 1]$, mediante l'applicazione $[a, b] \to [0, 1]$, $t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$. Componendo nella seconda componente, otteniamo quindi l'omeomorfismo cercato, ponendo $f : B \to \mathbf{S}^1 \times [0, 1]$, $f(\underline{x}) := (\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|}, \frac{|\underline{x}|-a}{b-a})$.

(3.c) Osserviamo che χ assume unicamente i valori 0 e 1. L'omeomorfismo $\Psi|_B : B \to \mathbf{S}^1 \times [a, b]$ introdotto nel punto precedente evidenzia che l'interno $\overset{o}{B}$ di B è il sottoinsieme $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid a^2 < x^2 + y^2 < b^2\}$: la restrizione di χ a tale aperto è la costante 1, e dunque χ è continua nei punti di $\overset{o}{B}$. Analogamente, la restrizione di χ all'esterno $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{B}$ è la costante 0, e dunque χ è continua nei punti di tale aperto. Resta da controllare l'eventuale continuità nei punti di frontiera $\partial B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = b^2\}$. Ma, se $p \in \partial B$, allora $\chi(p) = 1$ e ogni intorno aperto di p contiene punti dell'esterno di B, sui quali χ vale 0; dato l'intorno aperto $(1/2, 3/2)$ di 1 in $(\mathbf{R}, \mathcal{U}_{1,\text{Eucl}})$, non esiste quindi intorno U di p tale che $\chi(U) \subseteq (1/2, 3/2)$. Dunque i punti su cui χ non è continua sono esattamente i punti della frontiera di B, cioè $\partial B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = a^2\} \cup \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = b^2\}$.