Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2007/2008
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

FOGLI 7 e 8 - Esercizi Riepilogativi Svolti

Nei seguenti esercizi, si considerino fissati una volta per tutte un riferimento affine per $\mathbb{R}^2$ con coordinate non-omogenee (x, y), un riferimento proiettivo per $\mathbb{P}^1$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ ed un riferimento proiettivo per $\mathbb{P}^2$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$.

Esercizio 1: Dopo aver determinato la proiettivita'

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

che manda i punti $[1, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, 1]$ ordinatamente nei punti $[2, 3]$, $[2, -1]$ e $[0, 1]$, stabilire se f puo' essere una prospettivita'.
Svolgimento: La proiettivita' f e' quella determinata nell'esercizio 1 del Foglio 7, cioe' e' la proiettivita' indotta da tutte le matrici quadrate di ordine 2 della forma

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*.$$

Poiche' si era osservato che la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ha solo autovalori complessi, allora f non puo' essere una prosepttivita' poiche' f non ammette punti fissi.

Esercizio 2: Siano $P, Q, R \in \mathbb{P}^1$ punti distinti. Costruire geometricamente una proiettivita' $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ t.c. $f(P) = Q$, $f(Q) = R$, $f(R) = P$.
Svolgimento: Introduciamo una retta ausiliaria $m \subset \mathbb{P}^2$ non passante per P, Q e R, che vediamo in tale contesto come punti allineati su una retta $l \subset \mathbb{P}^2$, con l identificata con il $\mathbb{P}^1$ di partenza. Sia ora $\alpha \in \mathbb{P}^2$ un punto esterno sia ad l che ad m e sia

$$\pi_\alpha : l \to m$$

la prospettivita' di centro α. Siano

$$P_0 = \pi_\alpha(P), \quad Q_0 = \pi_\alpha(Q), \quad R_0 = \pi_\alpha(R).$$

Applicando la costruzione di Steiner, per costruire una proiettivita'

$$g : m \to l$$

t.c.

$$g(P_0) = Q, \quad g(Q_0) = R, \quad g(R_0) = P$$

basta prendere

$$\alpha = < P_0, g(Q_0) > \cap < Q_0, g(P_0) > = < P_0, R > \cap < Q_0, Q >,$$

$$\beta = < Q_0, g(R_0) > \cap < R_0, g(Q_0) > = < Q_0, P > \cap < P_0, R >,$$

che individuano una retta ausiliaria n. Consideriamo allora le prospettivita'

$$\pi_{Q_0} : n \to l$$

e

$$\pi_{g(Q_0)} = \pi_R : m \to n.$$

La proiettivita'

$$\pi_{Q_0} \circ \pi_R : m \to l$$

manda $P_0, Q_0, R_0 \in m$ rispettivamente in $Q, R, P \in l$. Questa proiettivita', come proiettivita' di $\mathbb{P}^1$ in se', coincide quindi con g come segue direttamente dal Teorema fondamentale delle proiettivita'. Percio' la proiettivita' cercata e'

$$f := g \circ \pi_\alpha = \pi_{Q_0} \circ \pi_R \circ \pi_\alpha.$$

Esercizio 3: In $\mathbb{R}^2$ sia data la conica affine di equazione

$$\mathcal{C} : \; x^2 + 2xy + y + x = 0.$$

(i) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$, considerando $\mathcal{C}$ contenuta nella carta affine (o schermo) $A_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\}$.
(ii) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$.
(iii) Dedurre la classificazione affine e la forma canonica affine di $\mathcal{C}$.
(iv) Dedurre la forma canonica proiettiva della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$.

Svolgimento: (i) Ovviamente, la chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$ e'

$$\overline{\mathcal{C}}: \quad x_1^2 + 2x_1x_2 + x_0x_2 + x_0x_1 = 0.$$

(ii) I punti impropri di $\mathcal{C}$ sono dati quindi dalle soluzioni del sistema

$$x_1^2 + 2x_1x_2 = x_0 = 0$$

e sono i punti

$$[0, 0, 1] \text{ e } [0, -2, 1].$$

(iii)Poiche' $\mathcal{C}$ ha due punti impropri distinti, $\mathcal{C}$ o e' un'iperbole generale oppure e' un'iperbole degenere (cioe' una coppia di rette incidenti in un punto del piano affine $\mathbb{R}^2$). Osserviamo allora che la matrice associata alla sua chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ e'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $det(A) = -1/4 \neq 0$, cioe' la conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ e' non degenere. Cio' comporta che anche la conica affine $\mathcal{C}$ e' non degenere. Quindi $\mathcal{C}$ e' sicuramente un'iperbole. Percio' la sua forma canonica affine, in un opportuno riferimento, sara'

$$x^2 - y^2 = 1.$$

(iv) Da quanto osservato nel punto (iii), poiche' $\overline{\mathcal{C}}$ e' non degenere, allora $\overline{\mathcal{C}}$ e' una conica proiettiva, generale a punti reali. Percio' la sua forma canonica proiettiva e', in un opportuno riferimento proiettivo,

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Esercizio 4: In $\mathbb{P}^2$ si consideri la conica proiettiva

$$\mathcal{D}: \ x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0.$$

(i) Determinare la classificazione proiettiva di $\mathcal{D}$;
(ii) Scrivere le equazioni delle tre coniche dedotte da $\mathcal{D}$ nelle tre differenti carte affini (schermi) di $\mathbb{P}^2$: A_0, A_1 e A_2 e stabilire la natura affine delle tre coniche affini ottenute.

Svolgimento: (i) La matrice della conica proiettiva e'

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $det(A) = 1/4 \neq 0$, cioe' la conica proiettiva e' non degenere. Inoltre, poiche' contiene i tre punti fondamentali, allora contiene infiniti punti. Deduciamo che e' una conica proiettiva generale a punti reali.
(ii) Se in A_0 prendiamo coordinate $x = x_1/x_0$, $y = x_2/x_0$ allora la conica diventa

$$x + y + xy = 0.$$

Poiche' e' non degenere, perche' la sua chiusura proiettiva lo e' come visto nel punto (i), e poiche' ha due punti impropri distinti, allora la conica affine e' un'iperbole. Analogamente in A_1 prendiamo coordinate $u = x_0/x_1$, $v = x_2/x_1$ e la conica diventa

$$u + uv + v = 0$$

che per gli stessi motivi della conica in A_0 e' un'iperbole generale a punti reali. Analogamente in A_2, se poniamo $s = x_0/x_2$ e $t = x_1/x_2$, la conica diventa

$$st + s + t = 0$$

che e' di nuovo un'iperbole generale a punti reali.

Esercizio 5: In $\mathbb{R}^2$ e' data la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana:

$$f(x, y) = 1 + 2y - 2xy.$$

(i) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$.
(ii) Determinare l'equazione della chiusura proiettiva $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e la sua forma canonica proiettiva.
(iii) Dai punti (i) ed (ii), dedurre la classificazione affine di $\mathcal{C}$.
(iv) Calcolare le equazioni cartesiane che la conica $\mathcal{D}$ definisce nelle altre due carte affini A_1 ed A_2.
Svolgimento: (i) I punti impropri sono dati dal sistema

$$x_0 = 2x_1x_2 = 0$$

e sono pertanto $[0, 0, 1]$ e $[0, 1, 0]$.

(ii) L'equazione cartesiana della chiusura proiettiva e' $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0$. Poiche' il determinante della matrice simmetrica associata ad F e' diverso da zero, la forma canonica proiettiva di $\mathcal{D}$ e': $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$.
(iii) La classificazione affine di $\mathcal{C}$ e' pertanto iperbole generale.
(iv) In A_1 abbiamo equazione

$$u^2 + 2uv - 2v = 0, \text{ dove } u = x_0/x_1, \ v = x_2/x_1$$

mentre in A_2 abbiamo equazione

$$s^2 + 2s - 2t = 0, \ \text{ dove } s = x_0/x_2, \ t = x_1/x_2$$

Esercizio 6: In $\mathbb{R}^2$ e' data la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana:

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y - 1.$$

(i) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$.
(ii) Determinare l'equazione della chiusura proiettiva $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e la sua forma canonica proiettiva.
(iii) Dai punti (i) ed (ii), dedurre la classificazione affine di $\mathcal{C}$.
(iv) Sia $\mathcal{G}$ la conica proiettiva di equazione cartesiana $G(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, scrivere l'equazione del fascio di coniche proiettive generato da $\mathcal{D}$ e da $\mathcal{G}$.
Svolgimento: (i) I punti impropri sono dati dal sistema

$$x_0 = x_1^2 - 2x_1x_2 = 0$$

e sono pertanto $[0, 0, 1]$ e $[0, 2, 1]$.
(ii) L'equazione cartesiana della chiusura proiettiva e' $F(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_0x_2 - x_0^2 = 0$. Poiche' il determinante della matrice simmetrica associata ad F e' zero, la conica e' semplicemente degenere e la sua forma canonica proiettiva di $\mathcal{D}$ e': $x_0^2 - x_1^2 = 0$.
(iii) La classificazione affine di $\mathcal{C}$ e' pertanto iperbole semplicemente degenere.
(iv) L'equazione del fascio e':

$$-\lambda x_0^2 + 2\lambda x_0x_2 + (\lambda + \mu)x_1^2 - 2\lambda x_1x_2 - \mu x_2^2 = 0.$$

Esercizio 7: In $\mathbb{R}^2$ e' data la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 6xy + 8\sqrt{2}x = 0.$$

(i) Determinare l'equazione cartesiana della chiusura proiettiva $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$, vedendo $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(ii) Determinare l'equazione della conica definita da $\mathcal{D}$ nella carta affine A_1.
(iii) Se $\mathcal{G}$ denota la conica proiettiva di equazione cartesiana $x_0^2+x_1^2=0$, trovare l'unica conica del fascio

$$\lambda\mathcal{D}+\mu\mathcal{G}$$

che passa per il punto $[1,2,1]$.
Svolgimento: (i) La chiusura proiettiva ha equazione cartesiana

$$x_1^2+x_2^2+6x_1x_2+8\sqrt{2}x_0x_1=0.$$

(ii) L'equazione in A_1 e' invece

$$1+v^2+6v+8\sqrt{2}u=0,$$

dove $u=x_0/x_1$ e $v=x_2/x_1$.
(iii) L'equazione del fascio e'

$$\lambda(x_1^2+x_2^2+6x_1x_2+8\sqrt{2}x_0x_1)+\mu(x_0^2+x_1^2)=0.$$

Imponendo all'equazione del fascio il passaggio per il punto $[1,2,1]$ si ottiene

$$\lambda(4+1+12+16\sqrt{2})+\mu(1+4)=0$$

cioe'

$$(17+16\sqrt{2})\lambda+5\mu=0.$$

Sostituendo tale relazione nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione dell'unica conica cercata.

Esercizio 8: In $\mathbb{R}^2$ sono assegnate le due coniche

$$\mathcal{C}:x^2-1=0 \quad \mathcal{D}:x^2-y^2=0.$$

(i) Determinare i loro punti impropri, vedendo $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 del piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$;
(ii) Stabilire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono equivalenti dal punto di vista affine;
(iii) Se $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{D}}$ denotano rispettivamente le chiusure proiettive di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, classificare dal punto di vista proiettivo $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{D}}$ e stabilire se sono proiettivamente equivalenti.

Svolgimento: (i) $\mathcal{C}$ ha un unico punto improprio che e' dato da $[0,0,1]$, contato con molteplicita' 2. Invece $\mathcal{D}$ ha due punti impropri reali e distinti dati da $[0,1,1]$ e $[0,1,-1]$.
(ii) Dal punto (i) segue immediatamente che le due coniche non possono essere affinemente equivalenti. Infatti la prima e' una parabola semplicemente degenere (retta contata due volte) mentre la seconda e' un'iperbole semplicemente degenere (coppia di rette incidenti).
(iii) Le equazioni delle chiusure proiettive sono, rispettivamente

$$x_1^2 - x_0^2 = 0, \quad x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

In ciascuno dei due casi, la matrice dellla conica proiettiva viene di rango 2, con due atovalori non nulli di segno opposto. Quindi sono entrambe coniche proiettive a punti reali semplicemente degeneri. Percio' $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{D}}$ sono proiettivamente equivalenti.

Esercizio 9: Nel piano affine $\mathbb{R}^2$, con coordinate affini (x,y), e' data la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana:

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + xy + y^2 - 2x - 1 = 0.$$

(i) Considerando tale piano affine $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, determinare l'equazione della chiusura proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(ii) Classificare la conica proiettiva $\overline{\mathcal{C}}$ dal punto di vista proiettivo e scrivere, in opportune coordinate, l'equazione della sua forma canonica proiettiva.
(iii) Determinare il tipo di punti impropri della conica affine $\mathcal{C}$ e dedurre la classificazione affine di $\mathcal{C}$, scrivendo inoltre in opportune coordinate la sua forma canonica affine.
Svolgimento: (i) L'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$, nelle coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e'

$$\overline{\mathcal{C}}: \quad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - x_0^2 = 0.$$

(ii) La matrice simmetrica associata a tale conica e':

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $det(A) = -7/4 \neq 0$. Inoltre, banalmente si osserva che $[1, 1 \pm \sqrt{2}, 0] \in \overline{\mathcal{C}}$. Pertanto $\overline{\mathcal{C}}$ e' una conica proiettiva generale a punti reali. Quindi, in opportune coordinate omogenee, la sua forma canonica proiettiva e'

$$z_0^2 + z_1^2 - z_2^2 = 0.$$

(iii) I punti impropri di $\mathcal{C}$ si trovano risolvendo il sistema

$$x_0 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - x_0^2 = 0,$$

che e' equivalente a

$$x_0 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

Tale sistema non ammette soluzioni reali, cioe' la conica affine non ha punti impropri reali. Poiche' $\overline{\mathcal{C}}$ era a punti reali, anche $\mathcal{C} = \overline{\mathcal{C}} \cap A_0$ e' a punti reali. Quindi, la conica affine e' un'ellisse generale a punti reali. In opportune cordinate affini (z, w), la sua forma canonica affine e'

$$z^2 + w^2 = 1.$$