Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

Soluzioni FOGLIO 7 - Esercizi Riepilogativi

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento proiettivo per $\mathbb{P}^1$, rispettivamente $\mathbb{P}^2$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1]$, rispettivamente $[x_0, x_1, x_2]$.

Esercizio 1: Determinare la proiettivita'

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

che manda i punti $[1, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, 1]$ ordinatamente nei punti $[2, 3]$, $[2, -1]$ e $[0, 1]$.
(i) Calcolare i trasformati mediante f dei punti $[1, 4]$ e $[3, 1]$;
(ii) Determinare eventuali punti fissi di f;
Svolgimento: Per il teorema fondamentale delle proiettivita', f e' univocamente determinata ed e' data da

$$f([x_0, x_1]] = [2x_0 - 2x_1, 3x_0 + x_1].$$

Quindi tutte le matrici quadrate di ordine 2 della forma

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

inducono f.
(i) $f([1, 4]) = [-6, 7]$, $f([3, 1]) = [2, 5]$.
(ii) Gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sono complessi, percio' f non puo' avere punti fissi.

Esercizio 2: Sia $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la retta proiettiva reale con riferimento proiettivo standard.
(i) Determinare la proiettivita'

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

t.c. mandi i punti

$$A = [1, 3], \ B = [2, -1], \ C = [2, 1]$$

rispettivamente in
$$F = [1, 0],\ G = [0, 1],\ U = [1, 1].$$
(ii) Calcolare $f([1, 2])$.

Svolgimento: (i) La proiettivita' f e' rappresentata dalla classe di proporzionalita' della matrice
$$A = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}.$$
(ii) $f([1, 2]) = [25, 4]$.

Esercizio 3: Sia $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la retta proiettiva reale con riferimento proiettivo standard.

(i) Determinare la proiettivita'
$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$
t.c. mandi i punti
$$A = [1, 0],\ B = [0, 1],\ C = [1, 1]$$
rispettivamente in
$$A = [1, 0],\ B = [1, -2],\ U = [3, -2].$$
(ii) Determinare gli eventuali punti fissi di f.

Svolgimento: (i) La proiettivita' f e' rappresentata dalla classe di proporzionalita' della matrice
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
(ii) La matrice A ha due autovalori distinti $\lambda = 2$ e $\mu = -2$. I relativi autospazi determinano 2 punti fissi di f che sono $P = [1, 0]$ e $Q = [1, -4]$.

Esercizio 4: In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ si consideri la proiettivita' $F : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ determinata dalla classe di proporzionalita' della matrice:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Verificare che F ha la retta $x_0 = 0$ come luogo fisso mentre ha la retta $x_2 = 0$ come luogo di punti fissi.

Svolgimento: (i) $F([0, \alpha, \beta]) = [0, \alpha + 2\beta, \beta]$, percio' $x_0 = 0$ viene fissato da F come retta.

(ii) $F([\alpha, \beta, 0]) = [\alpha, \beta, 0]$, cioe' la retta $x_2 = 0$ e' fissata punto per punto da F.