Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2007/2008
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

FOGLIO 6 - Esercizi Riepilogativi Svolti

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento proiettivo per $\mathbb{P}^1$, rispettivamente $\mathbb{P}^2$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1]$, rispettivamente $[x_0, x_1, x_2]$.

Esercizio 1: Sia $\mathbb{R}^2$ con coordinate cartesiane (x, y). Sia date le rette

$$r : x - 2y - 1 = 0,$$

$$s : x + y + 4 = 0,$$

$$t : 4y - 2x + 8 = 0.$$

(i) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare i punti impropri di r, s e t.
(ii) Dette $\overline{r}$, $\overline{s}$ e $\overline{t}$ le chiusure proiettive delle rispettive rette affini, determinare le intersezioni di $\overline{r}$, $\overline{s}$ e $\overline{t}$.
(iii) Dedurre che le rette r e t erano parallele.
(iv) Trovare l'equazione cartesiana di $\overline{r}$ nelle altre carte affini A_1 e A_2.
Svolgimento. (i) La chiusura proiettiva di r ha equazione

$$x_1 - 2x_2 - x_0 = 0;$$

pertanto il suo punto improprio e' dato dal sistema

$$x_0 = x_1 - 2x_2 = 0,$$

i.e.

$$[0, 2, 1].$$

La chiusura proiettiva di s ha equazione

$$x_1 + x_2 + 4x_0 = 0;$$

pertanto il suo punto improprio e' dato dal sistema

$$x_0 = x_1 + x_2 = 0,$$

i.e.

$$[0, 1, -1].$$

La chiusura proiettiva di t ha equazione

$$4x_2 - 2x_1 + 8x_0 = 0;$$

pertanto il suo punto improprio e' dato dal sistema

$$x_0 = -x_1 + 2x_2 = 0,$$

i.e.

$$[0, 2, 1].$$

(ii) Notiamo subito che r e s gia' si intersecano in $\mathbb{R}^2$ nel punto di coordinate

$$(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}).$$

Pertanto l'intersezione in $\mathbb{P}^2$ e' il punto

$$[3, -7, -5].$$

Analogo discorso per s e t.
Invece r e t determinano un sistema incompatibile, cioe' non esiste intersezione in $\mathbb{R}^2$. In effetti, dal punto (i) osservaimo che r e t hanno il medesimo punto improprio. Pertanto

$$\overline{r} \cap \bar{t} = [0, 2, 1].$$

Questa intersezione non e' visibile nella carta affine A_0.
(iii) Poiche' r e t hanno lo stesso punto improprio rispetto alla carta A_0, allora r e t sono parallele. Infatti le loro giaciture in A_0 sono ambedue proprorzionali a

$$x - 2y = 0.$$

(iv) Nella carta A_1 abbiamo che

$$u = x_0/x_1, \ v = x_2/x_1.$$

Pertanto $\overline{r}$ induce la retta di equazione

$$u + 2v - 1 = 0.$$

Nella carta A_2 abbiamo che

$$z = x_0/x_2, \ w = x_1/x_2.$$

Pertanto $\overline{r}$ induce la retta di equazione

$$z - w + 2 = 0.$$

Esercizio 2: Determinare la proiettivita'

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

che manda i punti $[1, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, 1]$ ordinatamente nei punti $[2, 3]$, $[2, -1]$ e $[0, 1]$.
(i) Calcolare i trasformati mediante f dei punti $[1, 4]$ e $[3, 1]$;
(ii) Determinare eventuali punti fissi di f;
Svolgimento: Per il Teorema fondamentale delle proiettivita', f e' univocamente determinata ed e' data da

$$f([x_0, x_1]] = [2x_0 - 2x_1, 3x_0 + x_1].$$

Quindi tutte le matrici quadrate di ordine 2 della forma

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

inducono f.
(i) $f([1, 4]) = [-6, 7]$, $f([3, 1]) = [2, 5]$.
(ii) Gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sono complessi, percio' f non puo' avere punti fissi.

Esercizio 3: Sia $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la retta proiettiva reale con riferimento proiettivo standard.
(i) Determinare la proiettivita'

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

t.c. mandi i punti

$$A = [1, 3],\ B = [2, -1],\ C = [2, 1]$$

rispettivamente in

$$F = [1, 0],\ G = [0, 1],\ U = [1, 1].$$

(ii) Calcolare $f([1, 2])$.

Svolgimento: (i) La proiettivita' f e' rappresentata dalla classe di proporzionalita' della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}.$$

(ii) $f([1,2]) = [25,4]$.

Esercizio 4: Sia $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la retta proiettiva reale con riferimento proiettivo standard.
(i) Determinare la proiettivita'

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

t.c. mandi i punti

$$A = [1,0],\ B = [0,1],\ C = [1,1]$$

rispettivamente in

$$A = [1,0],\ B = [1,-2],\ U = [3,-2].$$

(ii) Determinare gli eventuali punti fissi di f.
Svolgimento: (i) La proiettivita' f e' rappresentata dalla classe di proporzionalita' della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) La matrice A ha due autovalori distinti $\lambda = 2$ e $\mu = -2$. I relativi autospazi determinano 2 punti fissi di f che sono $P = [1,0]$ e $Q = [1,-4]$.

Esercizio 5: In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ si consideri la proiettivita' $F : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ determinata dalla classe di proporzionalita' della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Verificare che F ha la retta $x_0 = 0$ come luogo fisso mentre ha la retta $x_2 = 0$ come luogo di punti fissi.
Svolgimento: (i) $F([0,\alpha,\beta]) = [0,\alpha+2\beta,\beta]$, percio' $x_0 = 0$ viene fissato da F come retta.
(ii) $F([\alpha,\beta,0]) = [\alpha,\beta,0]$, cioe' la retta $x_2 = 0$ e' fissata punto per punto da F.

Esercizio 6: Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo standard e coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, si consideri la proiettivita' $F : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ determinata dalla classe di proporzionalita' di matrici λA, dove:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare quali delle rette fondamentali del riferimento standard di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ sono rette fisse per la proiettivita' F e, in tal caso, stabilire se sono anche rette di punti fissi per F.
(ii) Determinare i punti fissi di F.

Svolgimento. (i) Le rette $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$ non sono rette fisse per F. Infatti, per ogni $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ si ha

$$F([0, \alpha, \beta]) = [2\beta - \alpha, \alpha - \beta, \beta],$$

e

$$F([\alpha, 0, \beta]) = [2\beta - \alpha, -\beta, \beta].$$

Invece $x_2 = 0$ e' una retta fissa per F, poiche'

$$F([\alpha, \beta, 0]) = [-\beta - \alpha, \beta, 0].$$

Ovviamente non e' retta di punti fissi per F.
(ii) I punti fissi su $x_2 = 0$ si ottengono per quei valori di α e β tali che

$$-\alpha - \beta = \lambda\alpha, \quad \beta = \lambda\beta.$$

Si ottengono i due punti

$$[1, -2, 0] \quad [1, 0, 0].$$

Questi effettivamente sono gli unici punti fissi di F. Infatti, la matrice A ha polinomio caratteristico

$$P_A(t) = -(t+1)(1-t)^2,$$

che ha soluzioni $t = -1$, semplice, e $t = 1$, di molteplicita' 2. I relativi autospazi in $\mathbb{R}^3$ sono proprio generati da, rispettivamente, $(1, 0, 0)$ e $(1, -2, 0)$.

Esercizio 7: Sia $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la retta proiettiva reale con riferimento proiettivo standard.
(i) Determinare la classe di proporzionalita' di matrici λA che definiscono la proiettivita'

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

t.c. mandi i punti fondamentali del riferimento di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$,

$$[0,1],\ [1,0],\ [1,1]$$

ordinatamente, nei punti generali di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$

$$F = [1,3],\ G = [2,-1],\ K = [2,1].$$

(ii) Stabilire se f puo' essere una prospettivita'.

Svolgimento. (i) Poiche' la proiettivita' f e' tale che

$$f([0,1]) = [1,3], \quad f([1,0]) = [2,-1]$$

allora una matrice A che rappresenta f sicuramente deve essere della forma

$$A = \begin{pmatrix} 2\mu & \lambda \\ -\mu & 3\lambda \end{pmatrix}.$$

Poiche' inoltre $f([1,1]) = [2,1]$ e poiche' vogliamo trovare una unica A che generi la classe di proporzionalita' di matrici associata ad f, imponiamo allora

$$\lambda + 2\mu = 2 \quad 3\lambda - \mu = 1.$$

Tale sistema fornisce

$$\lambda = 4/7, \quad \mu = 5/7.$$

Ne segue che, possiamo scegliere come matrice A' che genera la classe di proporzionalita' di matrici associate ad f la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -5 & 12 \end{pmatrix}.$$

(ii) Il polinomio caratteristico di A' e'

$$P_{A'}(t) = (10-t)(12-t) + 20 = t^2 - 22t + 140.$$

Il discriminante di tale polinomio e'

$$\Delta = (22)^2 - 4(140) = 484 - 560 < 0.$$

Percio', la matrice A' non ha autovalori reali. Quindi f non puo' essere una prospettivita' perche' f non ha punti fissi.