Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

Soluzioni FOGLIO 6 - Esercizi Riepilogativi

Esercizio 1: Sia $RC(O, \mathcal{E})$ il riferimento usuale per $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z). Stabilire la natura delle quadrica euclidea Q, di equazione cartesiana

$$x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0.$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.
Svolgimento: Un modo per procedere e' osservare che l'equazione di Q si puo' scrivere anche come

$$(x + y)^2 - 3(x + y) + 2 = 0.$$

Ponendo $t := x + y$ si ottiene un'equazione di secondo grado in t,

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Tale equazione ha le due soluzioni $t = 1, \quad t = 2$. Cio' significa che il polinomio in t si fattorizza in

$$t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0$$

e quindi, anche

$$(x + y)^2 - 3(x + y) + 2 = (x + y - 1)(x + y - 2) = 0.$$

Questo significa che la quadrica Q e' costituita da due piani paralleli. Ne segue che la sua forma canonica affine, in un'opportuno riferimento, sara'

$$X_1^2 = 1.$$

Si puo' invece calcolare il rango della matrice A della quadrica Q. Si vede allora che ha rango 1. Percio', dalla classificazione, o la quadrica e' priva di punti reali, o e' un cilindro parabolico, o e' costituita da un piano contato 2 volte oppure e' costituita da due piani paralleli.

Facilmente si vede che Q contiene il punto $p = (1, 1, 0)$. Q non puo' essere un cilindro parabolico, dato che il piano tangente a Q nel punto p ha equazione $x+y-2 = 0$, che messo a sistema con l'equazione di Q, determina la relazione $0 = 0$ invece di una retta contata 2 volte.

Percio', per escludere che sia un piano contato 2 volte, basta intersecare con una retta generica dello spazio e vedere che si trovano 2 punti di intersezione distinti e non un punto contato 2 volte.

Esercizio 2: Sia $RC(O, \mathcal{E})$ il riferimento usuale per $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z). Stabilire la natura delle quadrica euclidea Q, di equazione cartesiana

$$x^2 + 2xy + y^2 + x + z = 1.$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.
Svolgimento: La matrice associata alla parte omogenea di grado 2 di Q ha rango 1. Facilmente si vede che la quadrica Q contiene punti reali, per esempio $(0, 0, 1)$. Il piano tangente in $(0, 0, 1)$ ha equazione

$$x + 1(z - 1) = 0.$$

Mettendo a sistema con l'equazione di Q, si ottiene

$$x + z - 1 = x^2 + 2xy + y^2 = 0,$$

cioe'

$$x + z - 1 = (x + y)^2 = 0$$

che e' l'intersezione di un piano e di un piano contato 2 volte, cioe' e' una retta contata due volte. Quindi Q e' un cilindro parabolico. La sua forma canonica affine e', in un opportuno riferimento,

$$X_1^2 + X_2 = 0.$$

Esercizio 3: Sia l la retta di $\mathbb{P}^2$, di equazione cartesiana $x_0 + x_1 = 0$. Si considerino i punti $P = [0, 1, -1]$, $Q = [1, 0, 0]$, $R = [1, -1, 1]$ e $K = [0, -2, 2]$. Sia $S := \{P, Q, R, K\}$ il sottoinsieme di punti nel piano proiettivo.
(i) Quanti elementi ha il sottoinsieme S di $\mathbb{P}^2$?
(ii) Determinare quali dei punti in S giace su l.
(iii) Verificare che i punti di S sono collineari, cioe' stanno su una retta m di $\mathbb{P}^2$.
Svolgimento: (i) S e' costituito solo da tre punti, dato che P e K sono lo stesso punto nel proiettivo.

(ii) L'unico punto in S che giace su l e' il punto R, dato che gli altri non soddisfano l'equazione di l.
(iii) Poiche', come vettori di $\mathbb{R}^3$, $(0,1,-1)+(1,0,0)=(1,1,-1)$, allora vuol dire che i corrispondenti punti nel proiettivo sono collineari, cioe' giacciono su un'opprtuna retta m, che e' il proiettivizzato del piano vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(0,1,-1)$ e $(1,0,0)$.

Esercizio 4: (i) In $\mathbb{P}^2$, con riferimento proiettivo usuale, si considerino i punti $[1,2,3]$, $[1,0,-1]$, $[2,1,0]$. Stabilire se sono collineari.
(ii) Determinare l'equazione omogenea della retta per i due punti $P=[1,1,-1]$ e $Q=[1,1,0]$ di $\mathbb{P}^2$.
(iii) Determinare l'intersezione delle rette $x_0-x_1+x_2=0$ e $2x_0-x_1-x_2=0$ in $\mathbb{P}^2$.
Svolgimento: (i) Poiche' i vettori di $\mathbb{R}^3$ sono tali che

$$(2,1,0)=\frac{1}{2}(1,2,3)+\frac{3}{2}(1,0,-1)$$

allora i tre punti sono collineari in $\mathbb{P}^2$.
(ii) La retta per P e Q e' unica e corrisponde al proiettivizzato dello span in $\mathbb{R}^3$ dei vettori corrispondenti, cioe' e'

$$x_0-x_1=0.$$

(iii) Le due rette si incontrano in $K=[2,3,1]$. Infatti, i corrispondenti piani vettoriali di $\mathbb{R}^3$ si intersecavano nella retta vettoriale che ha come vettore direttore $(2,3,1)$.