

FOGLIO 5 - Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Classificare dal punto di vista affine la quadrica Σ di \mathbb{R}^3 , di equazione cartesiana

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - 3X_1 - 3X_2 + 2 = 0.$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.

Svolgimento: Per compiere la classificazione affine, non è richiesto di svolgere necessariamente l'algoritmo di riduzione a forma canonica affine di Σ . Quando il polinomio che rappresenta la quadrica è abbastanza semplice, possiamo usare dei metodi più rapidi. Ad esempio il seguente: osserviamo che l'equazione di Σ si può scrivere anche come

$$(X_1 + X_2)^2 - 3(X_1 + X_2) + 2 = 0.$$

Ponendo $t := X_1 + X_2$ si ottiene l'equazione di secondo grado in t ,

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Tale equazione ha le due soluzioni $t = 1$ e $t = 2$. Ciò significa che possiamo fattorizzare il polinomio in t come

$$t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0.$$

Risostituendo $t = X_1 + X_2$ in questa fattorizzazione, abbiamo quindi

$$(X_1 + X_2)^2 - 3(X_1 + X_2) + 2 = (X_1 + X_2 - 1)(X_1 + X_2 - 2) = 0.$$

Questo significa che la quadrica Σ è costituita da due piani paralleli; infatti le equazioni cartesiane dei due piani non sono proporzionali ed entrambi hanno giacitura $X_1 + X_2 = 0$. Quindi Σ è di tipo (16) nella tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche.

Un modo alternativo per la classificazione affine è invece quello di notare che la matrice simmetrica completa \tilde{A} ha rango 2. Pertanto Σ è doppiamente degenere. Inoltre, la matrice A della forma quadratica associata a Σ ha rango 1. Perciò, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche, deduciamo che o la quadrica è della

tipologia (15) e quindi è priva di punti reali oppure è della tipologia (16), ed è quindi costituita da due piani paralleli. Facilmente si vede che Σ contiene il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi

Σ deve essere necessariamente di tipo (16).

Ne segue che, in un opportuno riferimento di \mathbb{R}^3 , $(O; w_1, w_2, w_3)$, dove le w_i sono le coordinate in tale riferimento per $1 \leq i \leq 3$, la forma canonica affine di Σ sarà $W_1^2 = 1$.

Esercizio 2. Dedurre la forma canonica affine della quadrica

$$\Sigma : X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2 + 4X_1 - 2 = 0.$$

Svolgimento: Un modo per risolvere l'esercizio è il seguente. Osserviamo che Σ si può scrivere come

$$(X_1^2 + 4X_1 + 4 - 4) + X_2^2 - 2X_3^2 - 2 = 0,$$

ossia

$$(X_1 + 2)^2 + X_2^2 - 2X_3^2 - 6 = 0.$$

Se facciamo la sostituzione

$$Y_1 = X_1 + 2, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3,$$

che equivale a traslare l'origine del riferimento, in tali nuove coordinate l'equazione di Σ diventa

$$\frac{Y_1^2}{6} + \frac{Y_2^2}{6} - \frac{Y_3^2}{3} = 1.$$

Visto che una traslazione è un'isometria, la precedente equazione è una forma canonica metrica contenuta nella tabella fondamentale per la classificazione metrica delle quadriche. Quindi Σ è un iperboloide iperbolico (i.e. ad una falda). Pertanto, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche, la sua forma canonica affine sarà in opportune coordinate

$$W_1^2 + W_2^2 - W_3^2 = 1.$$

Esercizio 3. Riconoscere la tipologia affine della quadrica

$$\Sigma : X_1^2 - 4X_2^2 - 2X_3 = 0.$$

(i) Dedurre che Σ contiene due schiere di rette. Descrivere le rette di tali schiere.

(ii) Determinare equazioni di ciascuna delle due rette, una per ogni schiera, passanti per il punto $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Svolgimento: Notiamo che il rango della matrice simmetrica completa associata a Σ è 4. Pertanto la quadrica è generale. Il rango della matrice simmetrica A associata alla forma quadratica \mathcal{Q} di Σ è invece 2. Pertanto, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine, la quadrica Σ o è di tipo (5), i.e. è un paraboloido generale ellittico, oppure è di tipo (6), i.e. un paraboloido generale iperbolico.

Ricordiamo ora che il segno del determinante di una quadrica Σ è una proprietà affine. Vediamo che una quadrica nella tipologia (5) ha tale determinante che è $\det \tilde{A} = -\frac{1}{a^2b^2} < 0$, mentre nella tipologia (6) il determinante è $\det \tilde{A} = \frac{1}{a^2b^2} > 0$. Calcolando la matrice \tilde{A} della quadrica Σ data, vediamo che il suo determinante è 4. Pertanto, Σ è necessariamente di tipo (6), i.e. è un paraboloido iperbolico o ad una falda.

(i) Dalla teoria generale, sappiamo che un paraboloido generale iperbolico contiene due schiere di rette. Possiamo trovare esplicitamente equazioni per queste schiere. Infatti, se scriviamo l'equazione di Σ come

$$(X_1 + 2X_2)(X_1 - 2X_2) = 2X_3.$$

Allora, si vede che Σ contiene le 2 famiglie di rette:

$$l_t : X_1 + 2X_2 - tX_3 = X_1 - 2X_2 - (2/t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e

$$m_s : X_1 - 2X_2 - sX_3 = X_1 + 2X_2 - (2/s) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che, per ogni $t \neq t'$, l_t e $l_{t'}$ sono sghembe mentre per ogni t e s come sopra, l_t e m_s si intersecano in un punto.

(ii) Il passaggio per N comporta che $t = 1$ e $s = 1$, cioè si hanno la retta l_1 e la retta m_1 delle due schiere distinte.

Esercizio 4. Stabilire la natura delle quadrica Σ , di equazione cartesiana

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + X_1 + X_3 = 1.$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.

Svolgimento: Proponiamo una risoluzione alternativa e più geometrica, che utilizza alcuni degli argomenti on-line di approfondimento (lo studente può procedere nella risoluzione standard che conosce).

La matrice associata alla parte omogenea di grado 2 di Σ ha rango 1. Pertanto, dalla classificazione, abbiamo che in tal caso Σ è o un cilindro parabolico, o due piani paralleli o due piani coincidenti oppure la quadrica vuota. Facilmente si vede che Σ contiene

punti reali, per esempio $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; quindi non può essere vuota.

Consideriamo il piano di equazione

$$X_1 + X_3 - 1 = 0.$$

Mettendo a sistema con l'equazione di Σ , si ottiene

$$X_1 + X_3 - 1 = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0,$$

cioè

$$X_1 + X_3 - 1 = (X_1 + X_2)^2 = 0$$

che è l'intersezione di un piano e di un piano contato 2 volte. Tale intersezione è pertanto una retta contata due volte. Non è difficile accorgersi che il piano $X_1 + X_3 - 1 = 0$ è il piano tangente a Σ nel punto P . Quindi Σ è necessariamente un cilindro parabolico. Infatti, se fosse stata o due piani paralleli o due piani coincidenti, questa intersezione sarebbe risultata uno dei piani costituenti Σ , contato con molteplicità.

La forma canonica affine di Σ è, in un opportuno riferimento,

$$Z_1^2 = Z_2.$$

Esercizio 5. Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 sia data la quadrica Σ di equazione

$$2X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2 + 4X_1X_3 - X_3 = 0.$$

Riconoscere il tipo di quadrica e scrivere, in un opportuno riferimento di coordinate (z_1, z_2, z_3) , la forma canonica affine di Σ .

Svolgimento: Proponiamo anche qui una soluzione geometrica, che utilizza alcuni degli argomenti on-line di approfondimento. La matrice simmetrica associata alla parte omogenea di grado due della quadrica Σ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha pertanto

$$\det A = 0 \text{ e } r(A) = 2.$$

Se calcoliamo il polinomio caratteristico di A , si ha $P_A(T) = \det(A - TI) = -T(T-2)(T-4)$. Perciò, le soluzioni di tale polinomio sono

$$0, 2, 4.$$

Quindi, i due autovalori non-nulli di A hanno stesso segno. Dalla classificazione affine delle quadriche si ha perciò che Σ è o

- (a) una quadrica vuota, oppure
- (b) una retta contata due volte, oppure
- (c) un cilindro ellittico, oppure
- (d) un paraboloide ellittico.

Procediamo per esclusioni. Poiché l'origine O appartiene banalmente a Σ , allora la possibilità (a) viene scartata. Se intersechiamo Σ con il piano di equazione

$$X_1 + X_3 = 0$$

troviamo come curva intersezione

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 0 \\ 2X_2^2 - X_3 = 0 \end{cases}$$

che è una curva intersezione di un piano e di un cilindro parabolico, perciò anche la possibilità (b) viene scartata. Sia ora α il piano di equazione

$$X_3 = 0.$$

Intersecando Σ con α si ottiene

$$\begin{cases} X_3 = 0 \\ 2X_1^2 + 2X_2^2 = 0 \end{cases}$$

che è solo il punto origine O . Facilmente si vede che α è il piano tangente a Σ in O ; pertanto si deduce che l'unica possibilità per Σ è (d) . Infatti, se Σ fosse una retta doppia, non sarebbe definito un piano tangente in O mentre se fosse un cilindro ellittico, il piano tangente in un qualsiasi suo punto P è costante lungo tutta la retta generatrice del cilindro passante per P , e quindi la curva intersezione sarebbe la stessa generatrice contata con molteplicità 2. Quindi le possibilità (b) e (c) devono per forza escludersi.

(ii) Dal punto precedente, si deduce immediatamente che la forma canonica affine di Σ è, nelle opportune coordinate,

$$Z_1^2 + Z_2^2 = Z_3.$$

Esercizio 6. Studiare le sezioni della quadrica Σ di equazione cartesiana

$$X_1 X_2 = X_3$$

con i piani paralleli ai piani coordinati e riconoscere il tipo di quadrica.

Svolgimento: Intersecando Σ con i piani della forma $X_3 = k$, con $k \in \mathbb{R}$, si ottengono iperboli equilateri, per $k \neq 0$, aventi asintoti paralleli agli assi coordinati x_1 e x_2 , mentre per $k = 0$ si ottiene la coppia di tali assi coordinati.

Intersecando con i piani paralleli a $X_1 = 0$, si ottengono ∞^1 rette di equazioni cartesiane

$$X_1 - t = X_2 - \frac{1}{t} X_3 = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Intersecando con i piani paralleli a $X_2 = 0$ si ottengono ∞^1 rette di equazioni cartesiane

$$X_2 - s = X_1 - \frac{1}{s} X_3 = 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La quadrica Σ è quindi una quadrica doppiamente rigata. Fra le quadriche doppiamente rigate ci sono l'iperboloide generale iperbolico (o, ad una falda) oppure il paraboloido generale iperbolico (o, a sella). Poichè la matrice simmetrica associata alla forma quadratica Q di Σ è di rango 2, allora Σ è necessariamente un paraboloido iperbolico.