Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

Soluzioni FOGLIO 5 - Esercizi Riepilogativi

Esercizio 1: Classificare le isometrie della retta cartesiana $\mathbb{R}^1$.
Svolgimento: Rispetto ad un riferimento cartesiano ortonormale di $\mathbb{R}^1$, una generica isometria f di $\mathbb{R}^1$ e':

$$x' = ax + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

dove a deve essere una matrice 1×1 (cioe' un numero reale) "ortogonale" che, per numeri reali, significa $a = \pm 1$, come discende dalla condizione $a \cdot a^t = a^2 = 1$. Infatti il trasposto di un numero coincide con il numero stesso.

Se $a = 1$, allora f e' una traslazione di passo c. Se invece $a = -1$, allora f e' una riflessione rispetto al punto $p_0 = \frac{1}{2}c$.

In definitiva, un'isometria di $\mathbb{R}^1$ e' o una traslazione oppure una riflessione.

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ per $\mathbb{R}^2$ con coordinate cartesiane (x_1, x_2).

Esercizio 2: Disegnare le seguenti coniche euclidee:
(i) $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 = 3$;
(ii) $x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - 6x_2 - 13 = 0$;
(iii) $x_1^2 + 2x_2^2 = 0$;
(iv) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 3$.
Svolgimento: (i) E' facile accorgersi che l'equazione data si puo' scrivere in forma

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 = 16$$

che e' quindi una circonferenza di centro $C = (2, 3)$ e raggio 4.
(ii) Scrivendo l'equazione data in

$$(x_1 - 2)^2 - (x_2 + 3)^2 = 18$$

la conica risulta essere un'iperbole generale di centro di simmetria $C = (2, -3)$ ed asintoti paralleli alle bisettrici dei quadranti, i.e. $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$.

(iii) E' una conica puntiforme, cioe' supportata solo nell'origine.
(iv) E' un'ellisse di centro l'origine ed assi le bisettrici dei quadranti, i.e. paralleli alle rette $x_1 = x_2$ e $x_1 = -x_2$.

Esercizio 3: Disegnare le seguenti coniche, determinando le coordinate dell'eventuale centro e gli eventuali assi di simmetria:
(i) $3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - 10x_1 + 6x_2 + 8 = 0$;
(ii) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1 + 5 = 0$.
(iii) $x_1^2 + x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 = 0$;
(iv) $x_1^2 - x_2^2 - 2x_1 + 1 = 0$.
Svolgimento: (i) Se poniamo

$$x_1 = x + \frac{3}{2}, \ \ x_2 = y - \frac{1}{2}$$

e sostituiamo nell'equazione della conica data, otteniamo la conica di equazione

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = 1.$$

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice della parte omogenea di grado 2 della conica. Una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$, costituita da autovettori per A, e'

$$\{v_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), \ v_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}.$$

Sia

$$x = (\sqrt{2}/2)x' - (\sqrt{2}/2)y', \quad y = (\sqrt{2}/2)x' + (\sqrt{2}/2)y'.$$

L' equazione della conica diventa

$$2(x')^2 + 4(y')^2 = 1$$

che e' un'ellisse.

Quindi, anche la conica di partenza e' un'ellisse, ha centro di simmetria, espresso nelle vecchie coordinate, $C = (3/2, -1/2)$ e i suoi assi di simmetria sono, nelle vecchie coordinate,

$$x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 - x_2 = 2.$$

(ii) La matrice della parte omogenea di grado 2 della conica e'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

percio' ha rango 1. Quindi la conica, o e' una retta doppia (cioe' una parabola degenere) oppure e' una parabola (generale). Una base ortonormale per $\mathbb{R}^2$, costituita da autovettori per A, e' come nel punto (i), data da

$$\{v_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2),\ v_2 = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)\}.$$

Come nel punto (i), scriviamo

$$x_1 = (\sqrt{2}/2)x - (\sqrt{2}/2)y, \quad x_2 = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2)y.$$

Sostituendo nell'equazione della conica, otteniamo:

$$2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 5 = 0.$$

Questa e' una parabola (generale) di asse $x = \sqrt{2}/2$ e vertice $V = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2})$.

Poiche', dalle relazioni precedenti, troviamo

$$x = (\sqrt{2}/2)x_1 + (\sqrt{2}/2)x_2,$$

l'asse della parabola iniziale e', nelle vecchie coordinate, dato da

$$x_1 + x_2 = 1.$$

Analogamente, poiche'

$$x_2 = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2)y$$

allora il vertice V, nelle vecchie coordinate, e' $V = (3/2, -1/2)$.

(iii) Ragionando come nei due punti precedenti, troviamo che la conica e' un'iperbole generale di centro di simmetria $(10/9, -2/9)$ e asintoti

$$3x_1 - 3x_2 - 4 = 0, \quad 3x_1 + 6x_2 - 2 = 0.$$

(iv) Scrivendo la conica come $(x_1 - 1)^2 - x_2^2 = 0$, si riconosce immediatamente che e' un'ipebole degenere. Infatti e' la conica riducibile, costituita dalle due rette

$$x_1 - x_2 - 1 = 0, \quad x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

Esercizio 4: Sia C la conica di equazione cartesiana $x_2^2 = 3x_1x_2$.

(i) Disegnare C;

(ii) Determinare l'equazione di C dopo una traslazione di passo $(1, 2)$;
(iii) Determinare l'equazione di C dopo una rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ attorno all'origine.
Svolgimento: (i) La conica e' un'iperbole degenere, dato che e' l'unione delle due rette

$$x_2 = 0, \quad x_2 = 3x_1.$$

(ii) L'equazione della coppia di rette traslate diventa

$$(x_2 - 2)^2 = 3(x_1 - 1)(x_2 - 2) = x_2^2 - 3x_1x_2 - x_2 + 6x_1 - 2 = 0.$$

(iii) La coppia di rette ruotate e'

$$(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)^2 - 3(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2)(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2) = 0$$

cioe'

$$2x_1^2 - x_2^2 - x_1x_2 = 0.$$