

FOGLIO 4 - Esercizi Riepilogativi Svolti

**Esercizio 1.** Classificare dal punto di vista metrico la conica  $\mathcal{C}$ , di equazione cartesiana,  $X_1^2 + X_2^2 - 4X_1 - 6X_2 = 3$ , individuando la sua forma canonica metrica.

**Svolgimento:** Non è necessario applicare l'algoritmo di riduzione a forma canonica metrica delle coniche. Nei casi in cui i polinomi non sono troppo complicati, con opportuni artifici si può determinare semplicemente la classificazione metrica delle coniche. Oppure, si possono studiare i ranghi ed i determinanti delle varie matrici simmetriche associate. Nel caso in esame, è facile accorgersi che l'equazione data si può scrivere in forma

$$(X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2 = 16$$

che è quindi una circonferenza di centro  $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e raggio 4. Considerando il cambiamento di coordinate

$$Y_1 := X_1 - 2, \quad Y_2 = X_2 - 3$$

dato da una traslazione, l'equazione della conica diventa

$$Y_1^2 + Y_2^2 = 16$$

e quindi

$$\frac{Y_1^2}{16} + \frac{Y_2^2}{16} = 1.$$

Pertanto, la forma canonica metrica di  $\mathcal{C}$  è quella di un'ellisse generale a punti reali, i.e. di tipo (1), con  $a = b = 4$ , come dev'essere dato che abbiamo già detto essere una circonferenza.

**Esercizio 2.** Sia data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione cartesiana  $7X_1^2 - 10\sqrt{3}X_1X_2 - 3X_2^2 + 12\sqrt{3}X_1 - 12X_2 - 12 = 0$ .

(i) Ridurre la conica  $\mathcal{C}$  a forma canonica metrica  $\mathcal{M}$ . Stabilire quindi la classificazione metrica di  $\mathcal{C}$  e determinare l'isometria che trasforma  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{M}$ .

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti di  $\mathcal{C}$ .

**Svolgimento:** (i) La matrice simmetrica associata alla forma quadratica della conica  $\mathcal{C}$  è la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\det A = -96 < 0$ , allora sicuramente  $\mathcal{C}$  sarà un'iperbole. Denotata con  $T$  un'indeterminata, il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$\det(A - TI) = T^2 - 4T - 96$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 12 \quad \lambda_2 = -8.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$  costituita da autovettori di  $A$  è ad esempio la base

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base  $M = M_{e f}$  è quindi

$$M := \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente una matrice ortogonale, essendo  $e$  ed  $f$  ambedue basi ortonormali. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\bar{x} = M\bar{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{3}/2y_1 + 1/2y_2, \quad x_2 = -1/2y_1 + \sqrt{3}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di  $\mathcal{C}$ , e ricordando che le coordinate  $(y_1, y_2)$  diagonalizzano  $A$ , si trova rapidamente che l'equazione della conica  $\mathcal{C}$  in tali coordinate diventa

$$12Y_1^2 - 8Y_2^2 + 24Y_1 - 12 = 0,$$

dato che  $\bar{f}_1$  era l'autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_1 = 12$ , mentre  $\bar{f}_2$  è quello relativo a  $\lambda_2 = -8$ . Dividendo tutta l'equazione per 4, studiamo quindi la conica

$$\mathcal{C}' : 3Y_1^2 - 2Y_2^2 + 6Y_1 - 3 = 0.$$

Poiché il coefficiente di  $Y_2$  è nullo, consideriamo la traslazione

$$\bar{y} = \bar{z} + \bar{c}$$

dove  $\bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  e  $\bar{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$ , con  $\alpha$  da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di  $\mathcal{C}'$  si ottiene

$$3Z_1^2 - 2Z_2^2 + 6(1 + \alpha)Z_1 + 3\alpha^2 + 6\alpha - 3 = 0.$$

Scegliendo  $\alpha = -1$  allora l'equazione della conica diventa

$$3Z_1^2 - 2Z_2^2 = 6$$

e quindi  $\bar{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Dividendo tutto per 6, si ottiene che  $\mathcal{C}$  è un'iperbole generale a punti reali e che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento  $(z_1, z_2)$  è

$$\mathcal{M}: Z_1^2/2 - Z_2^2/3 = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{M}$  è data da

$$\bar{x} = M(\bar{z} + \bar{c}) = M\bar{z} + M\bar{c}.$$

Visto che  $M\bar{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ , le formule dell'isometria sono

$$x_1 = \sqrt{3}/2z_1 + 1/2z_2 - \sqrt{3}/2, \quad x_2 = -1/2z_1 + \sqrt{3}/2z_2 + 1/2.$$

(ii) Gli asintoti della forma canonica  $\mathcal{M}$  sono le rette di equazioni cartesiane

$$\sqrt{3}Z_1 - \sqrt{2}Z_2 = 0, \quad \sqrt{3}Z_1 + \sqrt{2}Z_2 = 0$$

il centro di simmetria è l'origine di questo riferimento, l'asse di simmetria intersecato da  $\mathcal{M}$  è  $Z_2 = 0$  mentre l'asse di simmetria non intersecato da  $\mathcal{M}$  è  $Z_1 = 0$ .

Dalle formule  $\bar{x} = M\bar{z} + M\bar{c}$ , troviamo che il centro di simmetria di  $\mathcal{C}$  è quindi  $\bar{x} = M\bar{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ , che si ottiene per il valore di  $\bar{z} = \bar{0}$ . Sempre dalla relazione precedente e ricordando che  $M$  è una matrice ortogonale, si ottiene la relazione inversa

$$\bar{z} = {}^tM\bar{x} - \bar{c}$$

cioè

$$z_1 = \sqrt{3}/2x_1 - 1/2x_2 + 1, \quad z_2 = 1/2x_1 + \sqrt{3}/2x_2.$$

Pertanto, i due asintoti di  $\mathcal{C}$  sono, rispettivamente,

$$(3 - \sqrt{2})X_1 - (\sqrt{3} + \sqrt{6})X_2 + 2\sqrt{3} = 0, \quad (3 + \sqrt{2})X_1 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})X_2 + 2\sqrt{3} = 0.$$

Analogamente, l'asse di simmetria che non viene intersecato da  $\mathcal{C}$  è

$$\sqrt{3}X_1 - X_2 + 2 = 0,$$

mentre quello che viene intersecato da  $\mathcal{C}$  è

$$X_1 + \sqrt{3}X_2 = 0.$$

In questo modo, grazie alle proprietà geometriche note di  $\mathcal{M}$  ed alla isometria che scaturisce dall'algoritmo di riduzione a forma canonica metrica, conosciamo tutti i dati geometrici necessari per poter disegnare senza problemi la conica  $\mathcal{C}$  nel riferimento originario  $(x_1, x_2)$ .

**Esercizio 3.** È data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione cartesiana  $X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2 + 6X_1 - 12X_2 + 9 = 0$ . Ridurre la conica  $\mathcal{C}$  a forma canonica metrica  $\mathcal{M}$ . Stabilire la classificazione metrica di  $\mathcal{C}$  e determinare esplicitamente l'isometria che trasforma  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{M}$ .

**Svolgimento:** La matrice simmetrica associata alla forma quadratica della conica  $\mathcal{C}$  è la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiché  $\det A = 0$ , allora sicuramente  $\mathcal{C}$  apparterrà alla famiglia delle parabole. Il polinomio caratteristico di  $A$  è

$$\det(A - TI) = T(T - 5),$$

dove  $T$  un'indeterminata. Gli autovalori di  $A$  forniscono quindi, grazie al Teorema Spettrale, la seguente trasformazione di coordinate

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di  $\mathcal{C}$ , e ricordando che le coordinate  $(y_1, y_2)$  diagonalizzano  $A$ , si trova rapidamente che l'equazione della conica  $\mathcal{C}$  in tali coordinate diventa

$$\mathcal{C}' : 5Y_2^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}Y_2 + 9 = 0.$$

Poiché il coefficiente di  $Y_1$  è nullo, consideriamo la traslazione

$$\bar{y} = \bar{z} + \bar{c}$$

dove  $\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ , con  $\beta$  da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di  $\mathcal{C}'$  si ottiene che con  $\beta = 3/\sqrt{5}$  l'equazione della conica diventa

$$5Z_2^2 = 0.$$

Dividendo tutto per 5, si ottiene che in tale riferimento  $\mathcal{C}$  ha equazione cartesiana della sua forma

$$Z_2^2 = 0.$$

Deduciamo allora che  $\mathcal{C}$  è una parabola doppiamente degenera. Però questa equazione non è la forma canonica metrica, come nella tipologia (9) della tabella fondamentale per la classificazione metrica delle coniche. Per averla basterà considerare uno scambio di coordinate (che è determinata da un'isometria lineare di  $\mathbb{R}^2$ ). In altre parole, poniamo  $\bar{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{W} = B\bar{W}$ , che determina quindi

$$Z_1 = W_2, \quad Z_2 = W_1.$$

In tali coordinate, otteniamo quindi che l'equazione della forma canonica metrica di  $\mathcal{C}$  è esattamente  $W_1^2 = 0$ .

Componendo tutte le trasformazioni di coordinate utilizzate:

$$\bar{x} = M\bar{y}, \quad \bar{y} = \bar{z} + \bar{c}, \quad \bar{z} = B\bar{w},$$

otteniamo che l'isometria che porta  $\mathcal{C}$  nella sua forma canonica metrica  $\mathcal{M}$  è

$$x_1 = -1/\sqrt{5}w_1 + 2/\sqrt{5}w_2 - 3/5, \quad x_2 = +2/\sqrt{5}w_1 + 1/\sqrt{5}w_2 + 6/5;$$

in particolare, utilizzando l'isometria inversa troviamo che  $\mathcal{C}$  è la retta

$$X_1 - 2X_2 - 3 = 0$$

contata due volte.

**Esercizio 4.** Classificare dal punto di vista affine la conica  $\mathcal{C}$ , di equazione cartesiana  $X_1^2 - X_2^2 - 4X_1 - 6X_2 - 23 = 0$ , determinando esplicitamente la sua forma canonica affine.

**Svolgimento:** Non è necessario applicare la riduzione a forma canonica affine delle coniche. Come osservato precedentemente, nei casi in cui i polinomi non sono troppo complicati, con opportuni artifici si può determinare semplicemente la classificazione affine delle coniche. Oppure, si possono studiare i ranghi ed i determinanti delle varie matrici simmetriche associate. Nell'esercizio in esame, scrivendo l'equazione data come

$$(X_1 - 2)^2 - (X_2 + 3)^2 = 18$$

la conica risulta essere un'iperbole generale di centro di simmetria  $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  ed asintoti paralleli alle bisettrici dei quadranti, i.e.  $X_1 = X_2$  e  $X_1 = -X_2$ .

La stessa classificazione la potevamo ottenere considerando che la matrice simmetrica completa  $\tilde{A}$  della conica è di rango massimo e la matrice simmetrica  $A$  della forma quadratica della conica è di determinante  $-1$ . Quindi anche con questo tipo di analisi troviamo che la conica deve essere necessariamente un'iperbole generale. Pertanto, in opportune coordinate, la sua forma canonica affine è

$$Y_1^2 - Y_2^2 = 1.$$

**Esercizio 5.** Classificare dal punto di vista affine la conica  $\mathcal{C}$ , di equazione cartesiana  $X_1^2 + 2X_2^2 = 0$ , determinando esplicitamente il cambiamento di coordinate che la porta nella sua forma canonica affine.

**Svolgimento:** Anche in questo caso, possiamo evitare di applicare l'algoritmo di riduzione a forma canonica affine. Infatti, poiché la somma eguagliata a zero è una somma di due quadrati, essa è pertanto una conica puntiforme, cioè supportata solo nell'origine. Considerando le sostituzioni

$$Y_1 = X_1 \quad \text{e} \quad Y_2 = \sqrt{2} X_2,$$

dettate dall'affinità di equazioni

$$\bar{Y} = A\bar{X}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

si ha la forma canonica affine di  $\mathcal{C}$  che è, ovviamente,

$$Y_1^2 + Y_2^2 = 0.$$

**Esercizio 6.** Sia data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione cartesiana  $X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 - 4X_1 - 3 = 0$ .

(i) Classificare  $\mathcal{C}$ .

(ii) Ridurre  $\mathcal{C}$  nella sua forma canonica metrica  $\mathcal{M}$ , trovando esplicitamente l'isometria che trasforma  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{M}$ .

(iii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti della conica  $\mathcal{C}$ .

(iv) Ridurre  $\mathcal{C}$  nella sua forma canonica affine  $\mathcal{A}$ , trovando esplicitamente l'affinità che trasforma  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{A}$ .

**Svolgimento:** (i) La matrice simmetrica completa associata a  $\mathcal{C}$  è la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha determinante diverso da zero. Pertanto  $\mathcal{C}$  è una conica generale. La matrice simmetrica della forma quadratica associata alla conica è la sottomatrice  $\tilde{A}(2, 3; 2, 3)$  che è di determinante  $3/4$ . Pertanto  $\mathcal{C}$  è sicuramente un'ellisse.

Dall'equazione di  $\mathcal{C}$ , notiamo che il suo supporto contiene il punto  $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Pertanto, dalla classificazione delle ellissi generali, necessariamente deve contenere infiniti punti reali, i.e. è un'ellisse generale a punti reali.

(ii) Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica associata alla forma quadratica di  $\mathcal{C}$  è

$$\det(\tilde{A}(2, 3; 2, 3) - TI) = T^2 - 2T + \frac{3}{4}$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 1/2 \quad \lambda_2 = 3/2.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$  costituita da autovettori di  $\tilde{A}(2, 3; 2, 3)$  è ad esempio la base

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente ortogonale. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\bar{x} = M\bar{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di  $\mathcal{C}$ , e ricordando che le coordinate  $(y_1, y_2)$  diagonalizzano la forma quadratica  $\mathcal{Q}(X_1, X_2)$  associata all'equazione di  $\mathcal{C}$ , si trova rapidamente che l'equazione della conica  $\mathcal{C}$  in tali coordinate diventa

$$Y_1^2 + 3Y_2^2 - 2\sqrt{2}Y_1 + 2\sqrt{2}Y_2 - 6 = 0.$$

Consideriamo ora la traslazione

$$\bar{y} = \bar{z} + \bar{c}$$

dove  $\bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  e  $\bar{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , con  $\alpha$  e  $\beta$  da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di  $\mathcal{C}'$  si ottiene

$$Z_1^2 + 3Z_2^2 + 2(\alpha - \sqrt{2})Z_1 + 2(3\beta + \sqrt{2})Z_2 + \alpha^2 + 3\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2\sqrt{2}\beta - 6 = 0.$$

Scegliendo  $\alpha = \sqrt{2}$  e  $\beta = -\sqrt{2}/3$ , si ottiene

$$Z_1^2 + 3Z_2^2 = 10,$$

e quindi  $\bar{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$ . Dividendo tutto per 10, ritroviamo che  $\mathcal{C}$  è un'ellisse generale a punti reali dato che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento  $(z_1, z_2)$  è

$$\mathcal{M}: \frac{Z_1^2}{10} + \frac{Z_2^2}{10/3} = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{M}$  è data da

$$\bar{x} = M(\bar{z} + \bar{c}) = M\bar{z} + M\bar{c}.$$

Visto che  $M\bar{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ , le formule per questa isometria sono

$$x_1 = \sqrt{2}/2z_1 - \sqrt{2}/2z_2 + 4/3, \quad x_2 = \sqrt{2}/2z_1 + \sqrt{2}/2z_2 + 2/3.$$

(iii)  $\mathcal{M}$  ha centro di simmetria l'origine di questo riferimento, e gli asse di simmetria gli assi coordinati. Nelle coordinate del riferimento iniziale, il centro di simmetria di



$\mathcal{C}$  si ottiene per  $\bar{z} = \bar{0}$ , pertanto tale centro è  $M\bar{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ . L'isometria inversa è  $\bar{z} = {}^t M\bar{x} - \bar{c}$ , i.e.

$$z_1 = \sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2 - \sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2 + \sqrt{2}/3.$$

Pertanto, l'asse di simmetria  $Z_1 = 0$  corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 + X_2 = 2$$

mentre l'asse di simmetria  $Z_2 = 0$  corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 - X_2 = 2/3.$$

Per eventualmente disegnare  $\mathcal{C}$  con precisione, si potrebbero trovare le intersezioni con gli assi di simmetria: questi non sono altro che i punti ottenuti per trasformazione, mediante l'isometria  $\bar{x} = M\bar{z} + M\bar{c}$ , dei punti di intersezione di  $\mathcal{M}$  con gli assi coordinati  $Z_1 = 0$  e  $Z_2 = 0$ .

(iv) Per trovare la forma canonica affine di  $\mathcal{C}$ , consideriamo la forma canonica metrica  $\mathcal{M}$  ed applichiamo il procedimento di Sylvester alla forma quadratica associata all'equazione di  $\mathcal{M}$ . Se prendiamo in base di Sylvester indeterminate  $W_1$  e  $W_2$ , otteniamo la trasformazione

$$Z_1 = \sqrt{10} W_1, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{10}{3}} W_2.$$

Con tale trasformazione, la forma canonica metrica  $\mathcal{M}$  si trasforma in

$$\mathcal{A}: W_1^2 + W_2^2 = 1,$$

come doveva essere data la classificazione di  $\mathcal{C}$ . Prendiamo

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10/3} \end{pmatrix}$$

la matrice di questo cambiamento di coordinate. Poiché  $\bar{z} = S\bar{w}$ , dall'equazione vettoriale dell'isometria precedentemente trovata abbiamo  $\bar{x} = MA\bar{w} + M\bar{c}$ .

Calcolando il prodotto tra matrici, otteniamo che

$$MA = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi le formule per l'affinità sono:

$$x_1 = \sqrt{5}w_1 - \sqrt{5}/3w_2 + 4/3, \quad x_2 = \sqrt{5}w_1 + \sqrt{5}/3w_2 + 2/3.$$

**Esercizio 7.** Sia data la conica  $\mathcal{C}$  di equazione cartesiana  $\frac{1}{2}X_1^2 - X_1X_2 + \frac{1}{2}X_2^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 + 7 = 0$ .

(i) Classificare  $\mathcal{C}$ .

(ii) Ridurre  $\mathcal{C}$  nella sua forma canonica metrica  $\mathcal{M}$ . Determinare inoltre tutte le isometrie coinvolte in tale riduzione, stabilendo che tipo di isometrie sono.

(iii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria o dell'eventuale vertice.

**Svolgimento:** (i) La matrice simmetrica completa associata a  $\mathcal{C}$  è la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Poichè  $\det \tilde{A} = -\frac{9}{4} \neq 0$  e  $\det (\tilde{A}(2, 3; 2, 3)) = 0$ , la conica  $\mathcal{C}$  è sicuramente una parabola generale.

(ii) Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica associata alla forma quadratica di  $\mathcal{C}$  è

$$\det (\tilde{A}(2, 3; 2, 3) - TI) = T(T - 1)$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di  $\mathbb{R}^2$  costituita da autovettori di  $\tilde{A}(2, 3; 2, 3)$  è ad esempio la base

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente ortogonale (non speciale). La trasformazione di coordinate è quindi

$$\bar{x} = M\bar{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di  $\mathcal{C}$ , e ricordando che le coordinate  $(y_1, y_2)$  diagonalizzano la forma quadratica  $\mathcal{Q}(X_1, X_2)$  associata all'equazione di  $\mathcal{C}$ , si trova rapidamente che l'equazione della conica  $\mathcal{C}$  in tali coordinate diventa

$$Y_2^2 - 3Y_1 - 4Y_2 + 7 = 0.$$

Consideriamo ora la traslazione

$$\bar{y} = \bar{z} + \bar{c}$$

dove  $\bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  e  $\bar{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , con  $\alpha$  e  $\beta$  da determinare opportunamente con le solite tecniche. Si determina

$$\alpha = -1, \quad \beta = -2,$$

e l'equazione di  $\mathcal{C}'$  diventa, nel riferimento  $(z_1, z_2)$ :

$$\mathcal{C}'' : Z_2^2 = 3Z_1.$$

Facendo ora la sostituzione di indeterminate

$$Z_1 = W_2, \quad Z_2 = W_1,$$

dettata dall'isometria lineare

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{w},$$

si ottiene

$$\mathcal{C}''' : W_1^2 = 3W_2,$$

e quindi la forma canonica metrica richiesta è

$$\mathcal{M} : \frac{1}{3} W_1^2 = W_2.$$

La prima isometria considerata è l'isometria

$$\bar{x} = M\bar{y},$$

che è un'isometria lineare inversa. Precisamente è una riflessione le cui formule sono state descritte precedentemente, i.e.

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2.$$

La seconda isometria è ovviamente una traslazione, data da

$$y_1 = z_1 - 1, \quad y_2 = z_2 - 2.$$

La terza isometria

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{w}$$

è anch'essa un'isometria lineare inversa data dalla riflessione rispetto alla retta vettoriale  $Z_1 = Z_2$ .

(iii) La forma canonica metrica  $\mathcal{M}$  ha vertice nell'origine del riferimento  $(z_1, z_2)$  ed asse di simmetria l'asse  $Z_1 = 0$ . Pertanto, nelle coordinate del riferimento iniziale, il vertice di  $\mathcal{C}$  è

$$V = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mentre l'asse di simmetria  $Z_1 = 0$  corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 - X_2 = 2\sqrt{2}.$$