**Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura**
**Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2006/2007**
**Docente: Prof. F. Flamini**

## Soluzioni FOGLIO 4 - Esercizi Riepilogativi

Nei seguenti esercizi (tranne il 5), si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O,\mathcal{E})$ per $\mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane $(x_1,x_2,x_3)$.

**Esercizio 1**: Sia $\mathbf{v}=(-1,-1,-1)\in\mathbb{R}^3$.
(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\mathbf{v}$;
(ii) Sia $l$ la retta di equazioni parametriche

$$\mathbf{x}=(1,-1,0)+t(2,1,1),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Calcolare le equazioni parametriche della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$ a $l$.
**Svolgimento:** (i) Una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ avente $\mathbf{v}$ come primo vettore della base e', ad esempio

$$\mathbf{f}_1=\mathbf{v}=(-1,-1,-1),\ \mathbf{f}_2=(1,-1,0),\ \mathbf{f}_3=(-1,-1,2).$$

Per renderla ortonormale, basta dividere ogni vettore per la sua norma:

$$\mathbf{e}_1'=\frac{\mathbf{f}_1}{||\mathbf{f}_1||}=(-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3},-1/\sqrt{3}),\ \mathbf{e}_2'=\frac{\mathbf{f}_2}{||\mathbf{f}_2||}=(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0),$$

e

$$\mathbf{e}_3'=\frac{\mathbf{f}_3}{||\mathbf{f}_3||}=(-1/\sqrt{6},-1/\sqrt{6},2/\sqrt{6}).$$

La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno ad $\mathbf{e}_1'$, espressa in tale nuova base ortonormale, ha matrice rappresentativa standard:

$$A'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

La matrice che trasforma la base canonica nella base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ e' la matrice $M$ che ha per colonne le coordinate dei vettori di tale nuova base. Quindi, la matrice rappresentativa di $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$, espressa rispetto alla base canonica, e' la matrice $A$ data da

$$A = MA'M^{-1} = MA'M^t,$$

dato che $M$ e' una matrice ortogonale. Percio'

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Le equazioni parametriche cercate si ottengono, ad esempio, applicando la matrice $A$ al punto generico della retta $l$, che e' $(1+2t, -1+t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Si ottiene quindi

$$\mathbf{x} = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3) + t(4/3, (4-\sqrt{3})/3, (4+\sqrt{3})/3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un modo equivalente per trovare le equazioni parametriche della nuova retta era anche il seguente: si prendono 2 punti qualsiasi $P$ e $Q$ di $l$, si considerano i trasformati di tali due punti mediante $R_{\pi/2,\mathbf{v}}$, i.e. $A(P)$ e $A(Q)$, e infine si determina l'equazione parametrica della retta passante per i due punti $A(P)$ e $A(Q)$.

**Esercizio 2**: Sia $\mathbf{v} = (-1, -1, -1) \in \mathbb{R}^3$.
(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ attorno al vettore $\mathbf{v}$;
(ii) Sia $\Pi$ il piano di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare le equazioni parametriche del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4,\mathbf{v}}$ a $\Pi$.
**Svolgimento**: (i) Nella base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ determinata nell'esercizio precedente, la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno ad $\mathbf{e}'_1$ ha, rispetto a tale base ortonormale, matrice rappresentativa

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Percio', rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa e'

$$B = MB'M^t = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Basta prendere tre punti distinti e non allineati, $P, Q, T \in \Pi$, determinare i tre punti trasformati $P' = B(P)$, $Q' = B(Q)$ e $T' = B(T)$, e poi calcolare le equazioni parametriche del piano $\Pi'$ per questi nuovi tre punti.

**Esercizio 3**: Sia $\pi$ il piano di equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 = 0$.
(i) Calcolare le formule di riflessione rispetto a $\pi$;
(ii) calcolare le immagini dei punti $(0,0,0)$ e $(-1,1,-1)$;
(iii) calcolare l'immagine della retta di equazioni parametriche

$$(5,0,0) + t\ (1,0,-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Svolgimento:** (i) Un versore normale a $\pi$ e'

$$\underline{n} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0).$$

Una base ortonormale di $\pi$ e' data per esempio da

$$\{\underline{v} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0),\ \underline{w} = (0,0,1)\}.$$

Quindi $\mathcal{O} = \{\underline{v}, \underline{w}, \underline{n}\}$ e' una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

La matrice che rappresenta la simmetria $S_\pi$ nella base $\mathcal{O}$ e'

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio', se $N$ e' la matrice che trasforma la base canonica nella base ortonormale $\mathcal{O}$, allora $N$ e' una matrice ortogonale e la simmetria $S_\pi$ ha matrice rappresentativa in base canonica data da

$$C = NC'N^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto,

$$S_\pi(x_1, x_2, x_3) = (3/5x_1 - 4/5x_2, -4/5x_1 - 3/5x_2, x_3/5).$$

(ii) $S_\pi(0,0,0)=(0,0,0)$, $S_\pi(-1,1,-1)=(-7/5,1/5,-1)$.
(iii) Basta applicare la matrice $C$ al punto generico della retta data, che e' $(5+t,0-t)$; percio' le equazioni parametriche della retta sono:

$$(x_1,x_2,x_3)=(3,-4,0)+t(3/5,-4/5,-1).$$

**Esercizio 4**: Sia $K$ il cubo in $\mathbb{R}^3$ di vertici:

$$(1,1,1),\ \ (1,-1,1),\ \ (-1,1,1),\ \ (-1,-1,1),$$
$$(1,1,-1),\ \ (1,-1,-1),\ \ (-1,1,-1),\ \ (-1,-1,-1).$$

(i) Disegnare l'immagine di $K$ dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_3$;
(ii) Disegnare l'immagine di $K$ dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_1$;
(iii) Disegnare l'immagine di $K$ dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno a $\mathbf{v}=-\mathbf{e}_1$;
(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?
**Svolgimento:** (i) La rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_3$ e':

$$R_{\pi/2}(x_1,x_2,x_3)=(-x_2,x_1,x_3),$$

percio' $K$ viene mandato in se stesso.
(ii) Stessa conclusione come nel punto (i);
(iii) La rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $-\mathbf{e}_1$ e' esattamente come la rotazione $R_{-\pi/2}$ attorno ad $\mathbf{e}_1$. Analoga conclusione come in (i) ed in (ii).
(iv) Se $K$ viene mandato in se stesso, allora l'asse della rotazione e' uno dei seguenti:

(a) retta congiungente i centri di due facce opposte;
(b) retta congiungente i punti medi di due spigoli opposti;
(c) retta congiungente 2 vertici opposti.

Le rotazioni di tipo (a) sono di angoli $k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. Le rotazioni di tipo (b) devono mandare devono mandare gli spigoli che questo asse interseca in se stessi, percio' sono rotazioni di angolo $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Infine, le rotazioni di tipo (c) devono mandare i 3 lati uscenti da uno dei 2 vertici in loro stessi, cioe' i tre spigoli devono essere permutati fra loro. Percio' e' una rotazione di angolo $\frac{2k\pi}{3}$.