Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2007/2008
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

FOGLIO 3 - Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Siano dati i tre punti

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$.
(i) Verificare che i tre punti non sono allineati;
(ii) Scrivere l'equazione dell'unica circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i 3 punti.
Svolgimento: (i) Il determinante della matrice che ha per colonne le coordinate dei tre punti ha determinante diverso da zero. Percio' i tre punti non possono essere allineati, poiche' i vettori $OP - OQ$ e $OP - OR$ non sono allora proporzionali.
(ii) Per brevita', d'ora in poi denoteremo indifferentemente sia per riga che per colonna le coordinate di punti in $\mathbb{R}^3$ che le componenti di vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ rispetto alla base canonica e.
Il centro C della circonferenza $\mathcal{C}$ giacera' sul piano π passante per i tre punti e sara' l'intersezione, in tale piano π, degli assi dei segmenti per esempio $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Il raggio, sara' determinato per esempio da $r = d(C, A)$.
L'equazione cartesiana del piano per i tre punti e'

$$\pi : \quad X_1 + X_2 - X_3 = 1.$$

Se s e' l'asse del segmento $\overline{AB}$, allora s si ottiene intersecando π con il piano β, ortogonale al vettore $\vec{AB}= (1, 0, 1)$ e passante per il punto medio di $\overline{AB}$, che denotiamo con $M = (1/2, 1, 1/2)$. Percio' β ha equazione cartesiana $X_1 + X_3 - 1 = 0$ e quindi s ha equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 & = 1 \\ X_1 + X_3 & = 1 \end{cases} .$$

Analogamente, troviamo che l'equazione della retta s', asse del segmento $\overline{BC}$ e'

$$s' : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 & = 1 \\ X_1 - X_2 & = 1 \end{cases} .$$

Percio' $C = s \cap s' = (1,0,0)$ e quindi $r = d(A,C) = \sqrt{2}$. In definitiva, l'equazione della circonferenza cercata e' determinata dal sistema costituito dall'equazione del piano π, su cui $\mathcal{C}$ giace, e dall'equazione della sfera avente stesso centro e stesso raggio di $\mathcal{C}$, cioe':

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (X_1 - 1)^2 + X_2^2 + X_3^2 & = 2 \\ X_1 + X_2 - X_3 & = 1 \end{cases} .$$

Esercizio 2. Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortonormale standard e con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), determinare l'equazione cartesiana della sfera passante per i punti $P_1 = (2, -1, 3)$, $P_2 = (-1, 2, 1)$ ed avente centro sulla retta

$$r : \quad X_1 - 3X_3 + 1 = X_2 - X_3 - 2 = 0.$$

Svolgimento: Il centro C della sfera sara' l'intersezione della retta data con il piano π passante per il punto medio del segmento P_1P_2 ed ortogonale alla retta ℓ, che e' la retta passante per i due punti P_1 eP_2. Tale centro ha coordinate $(31/8, 29/8, 13/8)$.
Il raggio r e' dato ad esempio da $d(C, P_1)$, cioe' $r = \sqrt{1715}/8$. Quindi, l'equazione cartesiana della sfera e'

$$(x_1 - 31/8)^2 + (x_2 - 29/8)^2 + (x_3 - 13/8)^2 = 1715/64.$$

Esercizio 3. Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortonormale standard e con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), sia data la sfera $\mathcal{S}$ di equazione cartesiana

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 4X_1 + 2X_2 - x_3 + 1 = 0.$$

Determinare le coordinate del centro C ed il raggio r della sfera.
Svolgimento: Se $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ e' il centro di $\mathcal{S}$, ricordiamo che un'equazione cartesiana di $\mathcal{S}$ e' anche

$$(X_1 - \alpha)^2 + (X_2 - \beta)^2 + (X_3 - \gamma)^2 = r^2.$$

Sviluppando tutti i quadrati ed eguagliano coefficiente per coefficiente con l'equazione data di $\mathcal{S}$ nel testo dell'esercizio, otteniamo

$$\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = \frac{1}{2},\ r = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Esercizio 4. Trovare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il piano

$$\alpha:\ X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0$$

risulti, rispettivamente, secante, tangente o esterno alla sfera $\mathcal{S}$, di equazione cartesiana:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_1 - 4X_2 + 1 = 0.$$

Svolgimento: Il piano α risulta secante, tangente o esterno a $\mathcal{S}$ a seconda che la distanza dal centro della sfera $\mathcal{S}$ al piano α risulti rispettivamente minore, uguale o maggiore del raggio di $\mathcal{S}$.
Come nell'Esercizio 3, troviamo che il centro C di $\mathcal{S}$ e'

$$C := (1, 2, 0);$$

il raggio e' invece

$$r = 2.$$

Si ha

$$d(C, \alpha) = \frac{|5+k|}{\sqrt{6}}.$$

Pertanto, α risulta:

- secante $\mathcal{S}$ se $\frac{|5+k|}{\sqrt{6}} < 2$, i.e.
$$-2\sqrt{6} - 5 < k < 2\sqrt{6} - 5;$$
- tangente a $\mathcal{S}$ se $\frac{|5+k|}{\sqrt{6}} = 2$, i.e.
$$k = \pm 2\sqrt{6} - 5;$$
in altre parole, nel fascio di piani paralleli di equazione cartesiana $X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0$, con k parametro variabile, esistono 2 distinti piani tangenti alla sfera $\mathcal{S}$, ovviamenti in due punti distinti su $\mathcal{S}$;
- esterno a $\mathcal{S}$ per $k > 2\sqrt{6} - 5$ oppure $k < -2\sqrt{6} - 5$.

Esercizio 5. Sia data la forma quadratica di ordine 2

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2.$$

(i) Determinare un'isometria che determini coordinate (y_1, y_2) su $\mathbb{R}^2$ rispetto alle quali la forma quadratica Q risulti diagonale.
(ii) Dedurre il rango e la segnatura di Q.
Svolgimento: La matrice simmetrica $A = A_Q$ associata a Q nelle coordinate (x_1, x_2) e' la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiche' $det(A) = 0$, allora sicuramente A non avra' rango massimo. In altre parole $rg(A) \leq 1$. Visto che l'unica matrice di rango 0 e' la matrice identicamente nulla, allora $rg(A) = 1$.
Pertanto, visto che la nozione di rango di una forma quadratica Q e' indipendente dalla scelta della base di $\mathbb{R}^2$, equivalentemente della matrice simmetrica che la rappresenta, possiamo gia' concludere che

$$rg(Q) = 1.$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$det(A - tI) = t(t - 5).$$

Gli autovalori di A sono

$$0 \text{ e } 5.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, tali autovalori forniscono la seguente base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A:

$$\mathbf{f}_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad \mathbf{f}_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Se consideriamo sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, munito di questa nuova base ortonormale f, coordinate (y_1, y_2) relative alla base f allora, dalle varie conseguenze del teorema Spettrale, si ha che in tali coordinate Q diventa

$$Q(Y_1, Y_2) = 0Y_1^2 + 5Y_2^2 = 5Y_2^2.$$

Poiche' nel testo dell'esercizio e' richiesto esplicitamente di trovare la trasformazione (isometria lineare) di coordinate di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza Q, allora osserviamo che i versori della base f formano la matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice determina la trasformazione di coordinate

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioe'

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

In effetti, facendo queste sostituzioni nel polinomio iniziale

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2$$

e svolgendo tutti i conti, si ottiene effettivamente

$$Q(Y_1, Y_2) = 5Y_2^2,$$

che e' ulteriore verifica (superflua!) di quanto asserito precedentemente.
(ii) Avevamo gia' riscontrato che il rango di Q era 1. Visto che l'unico autovalore nonnullo di Q e' 5, che e' positivo, e visto che la nozione di segnatura di una forma quadratica e' indipendente dalla scelta della base, deduciamo che la segnatura di Q e' $(1, 0)$.

Esercizio 6. In $\mathbb{R}^3$ si consideri fissato il vettore

$$\mathbf{u}_0 = (1, 2, 1).$$

Sia T l'operatore lineare di $\mathbb{R}^3$, definito da

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0, \ \ \forall \ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Stabilire se T e' un operatore autoaggiunto;
(ii) Scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica e; confrontare il risultato con quanto risposto in (i).
Svolgimento: (i) T non e' autoaggiunto. Infatti, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, ricordando le proprieta' del prodotto vettoriale, si ha che

$$\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, (-\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}_0) \rangle = \langle \mathbf{x}, (-T(\mathbf{y})) \rangle.$$

Poiche' un operatore coincide con il suo opposto se e solo se e' l'operatore nullo, si ha pertanto $T \neq -T$ (dato che T e' manifestamente un operatore non-identicamente nullo). Percio' T non puo' essere autoaggiunto.
(ii) Per calcolare la matrice A di T rispetto alla base canonica, basta vedere le immagini $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$, dei tre vettori della base canonica. Per definizione di T, basta calcolare i tre prodotti vettoriali

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{u}_0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Si ha

$$T(\mathbf{e}_1) = (0, -1, 2), \quad T(\mathbf{e}_2) = (1, 0 - 1), \quad T(\mathbf{e}_3) = (-2, 1, 0).$$

Percio' la matrice A ha per i-esima colonna il vettore $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Manifestamente si vede che la matrice A non e' una matrice simmetrica. Poiche' la matrice A e' espressa utilizzando una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard che esiste su $\mathbb{R}^3$, allora possiamo anche in questo modo concludere che T non puo' essere un operatore autoaggiunto, come abbiamo dedotto in modo intrinseco al punto (i).

Esercizio 7. Sia T l'operatore autoaggiunto di $\mathbb{R}^4$ definito, rispetto alla base canonica e, dalla matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Scrivere l'equazione della forma quadratica Q associata a T.
(ii) Utilizzando il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A determinando la base ortonormale di autovettori di A in cui Q risulta essere una forma quadratica diagonale.
(iii) Determinare esplicitamente la segnatura di Q.
Svolgimento: (i) La matrice della forma quadratica Q coincide con A. Quindi Q ha equazione:

$$Q(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^2 - X_2^2 + 2X_3X_4.$$

(ii) Il polinomio caratteristico di A e'

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Quindi A ha due autovalori, i.e. 1 e -1, ambedue di molteplicita' algebrica 2. Denotati con V_1 e V_{-1} i rispettivi autospazi, troviamo che

$$V_1 = Span\{(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)\}, \quad V_{-1} = Span\{(0,1,0,0),\ (0,0,1,-1)\}$$

poiche' le equazioni cartesiane per V_1 sono

$$X_2 = X_3 - X_4 = 0,$$

mentre quelle per V_{-1} sono

$$X_1 = X_3 + X_4 = 0.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, per diagonalizzare A basta considerare una base ortonormale di autovettori di A.
Sappiamo che i due autospazi V_1 e V_{-1} sono gia' fra di loro ortogonali, poiche' sono autospazi relativi ad autovalori distinti. Osserviamo inoltre che i generatori di V_1 (rispettivamente di V_{-1}) sono due vettori ortogonali. Percio' per determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A, basta normalizzare i 4 vettori trovati. Otteniamo che la base voluta e'

$$f := \{(1,0,0,0),\ \ (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),\ \ (0,1,0,0),\ \ (0,0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\}.$$

Dalla teoria generale, in tale base, la matrice A diventa congruente alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cioe' alla matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, nell'ordine relativo alla scelta dell'ordinamento dei vettori della base f, ciascun autovalore ripetuto tante volte quanto e' la sua molteplicita' algebrica (equivalentemente geometrica). Questo significa che la forma quadratica Q in tale base ha, rispetto alle opportune coordinate, equazione

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 - Y_4^2.$$

(iii) La segnatura di Q e' ovviamente $(2,-2)$, come si deduceva gia' dal segno degli autovalori di A.

Esercizio 8. Stabilire rango, segnatura e forma diagonale della seguente forma quadratica

$$Q(X_1, X_2) = 3X_1^2 - 2X_1X_2 + 3X_2^2.$$

Svolgimento: Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice simmetrica associata a Q. Essa ha autovalori

$$2 \text{ e } 4.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, in opportune coordinate (y_1, y_2) di $\mathbb{R}^2$, l'equazione di Q diventa

$$2Y_1^2 + 4Y_2^2.$$

Pertanto Q ha rango 2 e segnatura $(2, 0)$.

Esercizio 9: Stabilire rango, segnatura e forma diagonale della seguente forma quadratica

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2.$$

Svolgimento: La matrice della parte omogenea di grado 2 della conica e'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

percio' Q ha rango 1. L'autovalore non nullo di A e' 2. Pertanto la segnatura di Q e' $(1, 0)$ ed, in opportune coordinate (y_1, y_2), la forma diagonale e' ad esempio

$$Q(Y_1, Y_2) = 2Y_1^2.$$