Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

Soluzioni FOGLIO 3 - Esercizi Riepilogativi

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ per $\mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3).

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ per $\mathbb{R}^3$ con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3).

Esercizio 1: Dati i vettori

$$\mathbf{x} = (0, 1, 0),\ \mathbf{y} = (1, 1, 1),\ \mathbf{z} = (2, 0, 1)$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori dati;
(ii) Calcolare l'orientazione della terna ordinata $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}\}$.
Svolgimento: (i) Il volume del parallelepipedo richiesto si trova calcolando il valore assoluto del determinante della matrice quadrata di ordine 3 che ha per colonne le coordinate della terna di vettori. Tale volume risulta uguale ad 1.
Il valore del determinante della matrice associata alla terna ordinata $\{\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}\}$ e' - 1; segue che $Or\{\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}\} = -1$, i.e. la terna ordinata non e' equiorientata (o equiversa) alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2: Siano assegnati la retta

$$r : \begin{cases} x - y &= 0 \\ y + 2z &= 0, \end{cases} \qquad \text{ed il piano } \ \Pi : x + z = 0.$$

Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r' che é la proiezione ortogonale di r sul piano P.
Svolgimento: La retta r' sara' determinata dall'intersezione di Π con Γ, dove Γ e' il piano passante per la retta r e perpendicolare a Π, i.e. $r' = \Pi \cap \Gamma$. Un vettore normale a Π e' il vettore $\underline{n} = (1, 0, 1)$. Il fascio di piani di asse r ha equazione:

$$\lambda(x - y) + \mu(y + 2z) = 0,$$

con λ e μ numeri reali variabili, non entrambi nulli.

In tale fascio di piani, vogliamo l'unico piano che sia parallelo a $\underline{n}$; equivalentemente l'unico piano il cui vettore normale $\underline{n}_{\lambda,\mu} = (\lambda, \mu - \lambda, 2\mu)$ sia perpendicolare ad $\underline{n}$. Percio', imponendo

$$\underline{n} \cdot \underline{n}_{\lambda,\mu} = 0$$

si ottiene la relazione lineare tra λ e μ,

$$\lambda + 2\mu = 0,$$

cioe', $\lambda = -2\mu$.

Sostituendo tale relazione nell'equazione del fascio di piani, e ricordando che un'equazione cartesiana di un piano e' definita a meno di un coefficiente di proporzionalita', troviamo che l'equazione di Γ e' $2x - 3y - 2z = 0$. Percio', la retta r' ha equazioni cartesiane:

$$r' : \begin{cases} x + z & = 0 \\ 2x - 3y + 2z & = 0, \end{cases} .$$

Esercizio 3: Sono assegnate la retta

$$r : \begin{cases} x - y & = 1 \\ z & = 0, \end{cases} \quad \text{ed il piano } \Pi : x + 2y - z = 0.$$

(i) Determinare il piano Λ contenente r e normale a Π;
(ii) Determinare la retta s, proiezione ortogonale di r su Π;
(iii) Determinare l'angolo convesso $\theta(r, s)$ tra r ed s;
Svolgimento: (i) Il pIano Π ha vettore normale $\underline{n} = (1, 2, -1)$. Sia

$$\lambda(x - y - 1) + \mu z = 0$$

l'equazione cartesiana del fascio di piani di asse la retta r, con λ e μ numeri reali variabili, non entrambi nulli. Imponendo il parallelismo con $\underline{n}$, determiniamo $\lambda - 2\lambda - \mu = 0$, i.e. $\mu = -\lambda$. Percio' il piano Λ ha equazione cartesiana $x - y - z = 1$.
(ii) La retta s e' l'intersezione di Π con Λ, percio':

$$s : \begin{cases} x - y - z & = 1 \\ x + 2y - z & = 0, \end{cases} .$$

(iii) La retta r ha vettore direttore $\underline{r} = (1,1,0)$, la retta s ha vettore direttore $\underline{s} = (1,0,1)$. Percio',

$$cos(\theta(r,s)) = \pm \frac{\underline{r} \cdot \underline{s}}{||\underline{r}||||\underline{s}||} = \pm \frac{1}{2},$$

i.e. $\theta(r,s)$ e' o $\frac{\pi}{3}$ oppure $\frac{2}{3}\pi$, a seconda di come sono orientate le due rette.

Esercizio 4: Dati i tre punti

$$A = (0,1,0),\ B = (1,1,1),\ C = (2,0,1)$$

(i) Verificare che i tre punti non sono allineati;
(ii) Scrivere l'equazione dell'unica circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i 3 punti.
Svolgimento: (i) Il determinante della matrice che ha per colonne le coordinate dei tre punti ha determinante diverso da zero. percio' i tre punti non possono essere allineati.
(ii) Il centro C della circonferenza $\mathcal{C}$ giacera' sul piano π passante per i tre punti e sara' l'intersezione, in tale piano π, degli assi dei segmenti per esempio $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. Il raggio, sara' determinato per esempio da $r = d(C, A)$.

L'equazione cartesiana del piano per i tre punti e'

$$det \begin{pmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

cioe'

$$\pi : \quad x + y - z = 1.$$

Se s e' l'asse del segmento $\overline{AB}$, allora s si ottiene intersecando π con il piano β, ortogonale al vettore $\overrightarrow{AB} = (1,0,1)$ e passante per il punto medio di $\overline{AB}$, che denotiamo con $M = (1/2, 1, 1/2)$. Percio' β ha equazione cartesiana $x + z - 1 = 0$ e quindi s ha equazioni cartesiane

$$s : \begin{cases} x + y - z & = 1 \\ x + z & = 1 \end{cases} .$$

Analogamente, troviamo che l'equazione della retta s', asse del segmento $\overline{BC}$ e'

$$s' : \begin{cases} x + y - z & = 1 \\ x - y & = 1 \end{cases} .$$

Percio' $C = s \cap s' = (1,0,0)$ e quindi $r = d(A,C) = \sqrt{2}$. In definitiva, l'equazione della circonferenza cercata e':

$$\mathcal{C} : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + z^2 & = 2 \\ x + y - z & = 1 \end{cases} .$$