Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2007/2008
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

FOGLIO 2 - Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Siano r_1 ed r_2 due rette passanti ambedue per il punto $p_0 = (2, -1)$ e rispettivamente per $q_1 = (18/5, 1/5)$ la prima e per $q_2 = (2, 1)$ la seconda. Assumiamo che tali rette siano tangenti ad una circonferenza $\mathcal{C}$ rispettivamente in q_1 ed in q_2.
(i) Determinare il centro C, il raggio r e l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$;
(ii) Disegnare la circonferenza $\mathcal{C}$.
Svolgimento: (i) Denotiamo con n_i la retta perependicolare alla retta r_i e passante per il punto q_i, $1 \leq i \leq 2$. Allora, il centro C sara' determinato dall'intersezione $n_1 \cap n_2$ mentre il raggio sara' dato dalla distanza $d(C, q_i)$, per uno qualsiasi dei due punti q_i, $1 \leq i \leq 2$.

Un vettore direttore di r_1 e' $(4, 3)$, percio' la retta n_1 ha equazione cartesiana $4x_1 + 3x_2 - 15 = 0$. Un vettore direttore di r_2 e' $(0, 1)$, percio' la retta n_2 ha equazione cartesiana $x_2 - 1 = 0$. Allora $C = (3, 1)$ mentre $r = d(C, q_1) = d(C, q_2) = 1$.

L'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ e' data da $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$, cioe':

$$x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 + 9 = 0.$$

(ii) Per disegnare la circonferenza, basta considerare C e r.

Esercizio 2 Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ sono dati i tre punti non allineati di coordinate:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare l'equazione cartesiana dell'unica circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i tre punti dati.
(ii) Disegnare la circonferenza $\mathcal{C}$.
(iii) Determinare l'equazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P \in \mathcal{C}$.
Svolgimento: (i) Il centro della circonferenza da determinare e' il punto C intersezione degli assi delle due corde $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$. Percio', il punto medio di $\overline{PQ}$ e' $M_{PQ} =$

$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, mentre il punto medio di $\overline{QR}$ e' $M_{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Invece, la direzione del vettore $\overrightarrow{PQ} = (-1, 1)$, mentre la direzione del vettore $\overrightarrow{QR} = (0, -3) = (0, -1)$.

Quindi, l'asse del segmento $\overline{PQ}$ e' la retta per M_{PQ} con parametri direttori determinati da un vettore normale a $\overrightarrow{PQ}$, per esempio $(1, 1)$. Un'equazione cartesiana di tale asse e' quindi:

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Analogamente, l'asse del segmento $\overline{QR}$ e' la retta per M_{QR} con parametri direttori determinati da un vettore normale a $\overrightarrow{QR}$, per esempio $(1, 0)$. Un'equazione cartesiana di tale asse e':

$$2x_2 - 1 = 0.$$

Il loro punto di intersezione e' il punto C di coordinate $C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Il raggio della circonferenza e' dato da

$$r = d(C, P) = \sqrt{10}/2.$$

Percio', l'equazione della circonferenza voluta si determina con

$$(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 = 10/4.$$

(ii) Per disegnare la circonferenza, basta considerare il centro ed il raggio determinati al punto (i).
(iii) L'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ in P e' data dalla formula

$$(2 - 1/2)(x_1 - 2) + (1 - 1/2)(x_2 - 1) = 0$$

cioe':

$$3x_1 + x_2 - 7 = 0.$$

Esercizio 3: Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori dati;

(ii) calcolare l'orientazione della terna ordinata $\{\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}\}$.

Svolgimento: (i) Il volume del parallelepipedo richiesto si trova calcolando il valore assoluto del determinante della matrice quadrata di ordine 3 che ha per colonne le coordinate della terna di vettori. Tale volume risulta uguale ad 1.

(ii) Il valore del determinante della matrice associata alla terna ordinata $\{\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}\}$ e' - 1; segue che la terna ordinata e' una base non equiorientata (o equiversa) alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4: Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, sia dato il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$U: \ X_1 - X_2 = 0.$$

Determinare una base ortonormale b di $\mathbb{R}^3$, orientata positivamente ed i cui primi due versori appartengano al sottospazio U.

Svolgimento: Notiamo che U e' un piano vettoriale, cioe' e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Una base naturale per U e' data dai vettori:

$$\overline{v} = (1,1,0), \quad \overline{w} = (0,0,1)$$

(le cui coordinate sono scritte per riga per brevita'). Notiamo che

$$\langle \overline{v}, \overline{w} \rangle = 0$$

e che $\overline{w}$ e' gia' un versore. Percio' per determinare una base ortonormale di U, basta versorizzare $\overline{v}$ e si ottiene:

$$\overline{f}_1 := \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 := \overline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b. Per determinare il terzo vettore di b, basta considerare

$$\overline{f}_3 := \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = ||\overline{f}_3||^2 = 1.$$

Esercizio 5: Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, sia dato il sottospazio vettoriale U, di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 & = & 0 \\ X_2 + X_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Determinare una base ortonormale b' di $\mathbb{R}^3$, orientata positivamente ed il cui primo versore appartenga al sottospazio U.

Svolgimento: Notiamo che U e' una retta vettoriale. Un vettore direttore di U, i.e. una base di U, si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce U. Ad esempio, una soluzione e' data dal vettore

$$\overline{v} = (1, -1, 1).$$

Percio', versorizzando $\overline{v}$ si ottiene:

$$\overline{f}_1 := \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora scegliere opportunamente un vettore di $\mathbb{R}^3$ che sia manifestamente ortogonale ad U, ad esempio

$$\overline{w} = (1, 1, 0).$$

Percio', versorizzando $\overline{w}$ otteniamo:

$$\overline{f}_2 = \frac{\overline{w}}{||\overline{w}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b'. Per determinare il terzo vettore della base b', basta considerare

$$\overline{f}_3 := \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = ||\overline{f}_3||^2 = 1.$$

Esercizio 6: Sia $\overline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore.

(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,\overline{v}}$ di angolo $\pi/2$ attorno al vettore $\overline{v}$;

(ii) Sia l la retta di equazioni parametriche

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calcolare le equazioni parametriche della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\overline{v}}$ a l.

Svolgimento: (i) Una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ avente $\overline{v}$ come primo vettore della base e', ad esempio

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per renderla ortonormale, basta dividere ogni vettore per la sua norma (le coordinate le scriviamo per comodita' per riga):

$$\overline{e}'_1 = \frac{\overline{f}_1}{||\overline{f}_1||} = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), \ \overline{e}'_2 = \frac{\overline{f}_2}{||\overline{f}_2||} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),$$

e

$$\overline{e}'_3 = \frac{\overline{f}_3}{||\overline{f}_3||} = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}).$$

La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno ad $\overline{e}'_1$, espressa in tale nuova base ortonormale, ha matrice rappresentativa standard:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base dalla base canonica alla base $\{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$ e' la matrice M che ha per colonne le coordinate dei vettori di tale nuova base espressi in base canonica. Quindi, la matrice rappresentativa di $R_{\pi/2,\overline{v}}$, espressa rispetto alla base canonica, e' la matrice A data da

$$A = MA'M^{-1} = MA'M^t,$$

dato che M e' una matrice ortogonale. Percio'

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Le equazioni parametriche cercate si ottengono, ad esempio, applicando la matrice A al punto generico della retta l, che e' $(1+2t, -1+t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$ (scritto per riga per brevita'). Si ottiene quindi

$$\overline{x} = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3) + t(4/3, (4-\sqrt{3})/3, (4+\sqrt{3})/3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un modo equivalente per trovare le equazioni parametriche della nuova retta era anche il seguente: si prendono 2 punti qualsiasi P e Q di l, si considerano i trasformati di tali due punti mediante $R_{\pi/2,\overline{v}}$, i.e. $A(P)$ e $A(Q)$, e infine si determina l'equazione parametrica della retta passante per i due punti $A(P)$ e $A(Q)$.

Esercizio 7: Sia $\overline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore.
(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,\overline{v}}$ di un angolo $-\pi/4$ attorno al vettore $\overline{v}$;
(ii) Sia Π il piano di equazione cartesiana

$$X_1 + X_2 = 7.$$

Calcolare le equazioni parametriche del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4,\overline{v}}$ a Π.
Svolgimento: (i) Nella base $\{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$ determinata nell'esercizio precedente, la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno ad $\overline{e}'_1$ ha, rispetto a tale base ortonormale, matrice rappresentativa

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Percio', rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa e'

$$B = MB'M^t = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Basta prendere tre punti distinti e non allineati, $P, Q, T \in \Pi$, determinare i tre punti trasformati $P' = B(P)$, $Q' = B(Q)$ e $T' = B(T)$, e poi calcolare le equazioni parametriche del piano Π' per questi nuovi tre punti.

Esercizio 8: Sia π il piano di equazione cartesiana $x_1 + 2x_2 = 0$.
(i) Calcolare le formule di riflessione rispetto a π;
(ii) calcolare le immagini dei punti $(0,0,0)$ e $(-1,1,-1)$;
(iii) calcolare l'immagine della retta di equazioni parametriche

$$(5,0,0) + t\ (1,0,-1), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Svolgimento: (i) Un versore normale a π e'

$$\overline{n} = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0).$$

Una base ortonormale di π e' data per esempio da

$$\{\overline{v} = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0),\ \overline{w} = (0,0,1)\}.$$

Quindi $b := \{\overline{v}, \overline{w}, \overline{n}\}$ e' una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
La matrice che rappresenta la simmetria S_π nella base b e'

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio', se N e' la matrice cambiamento di base dalla base canonica e nella base ortonormale b, allora N e' una matrice ortogonale e la simmetria S_π ha matrice rappresentativa in base canonica data da

$$C = NC'N^t = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto,

$$S_\pi(X_1, X_2, X_3) = (3/5X_1 - 4/5X_2, -4/5X_1 - 3/5X_2, X_3/5).$$

(ii) $S_\pi(0,0,0) = (0,0,0)$, $S_\pi(-1,1,-1) = (-7/5, 1/5, -1)$.

(iii) Basta applicare la matrice C al punto generico della retta data, che e' $(5+t, 0-t)$; percio' le equazioni parametriche della retta sono:

$$(X_1, X_2, X_3) = (3, -4, 0) + t(3/5, -4/5, -1).$$

Esercizio 9: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ sia l la retta di equazioni parametriche

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Scrivere le formule di rotazione $R_{\frac{\pi}{2}, \overline{v}}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno al vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Calcolare le equazioni parametriche della retta $m = R_{\frac{\pi}{2}, \overline{v}}(l)$.

Svolgimento: (i) Sia $b = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ positivamente orientata e con $\overline{f}_1 = \overline{v}/||\overline{v}||$. Percio'

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

In base b, la matrice di rotazione $R_{\pi/2}$ e':

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Percio', se M e' la matrice cambiamento di base dalla base canonica e alla base b, allora M e' una matrice ortogonale e la matrice della rotazione $R_{\pi/2, \overline{v}}$ in base e e':

$$A = M\tilde{A}M^t = \begin{pmatrix} 1/3 & (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 \\ 1/3 & 1/3 & -\sqrt{3}/3 \\ (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(ii) La retta m ha equazioni parametriche

$$A \begin{pmatrix} 1+t \\ 3t \\ 1+t \end{pmatrix}, \ \ t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 10: Sia K il cubo in $\mathbb{R}^3$ di vertici:

$$(1,1,1),\ \ (1,-1,1),\ \ (-1,1,1),\ \ (-1,-1,1),$$

$$(1,1,-1),\ \ (1,-1,-1),\ \ (-1,1,-1),\ \ (-1,-1,-1).$$

(i) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\overline{e}_3$;
(ii) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\overline{e}_1$;
(iii) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2}$ attorno a $\overline{v} = -\overline{e}_1$;
(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?
Svolgimento: (i) La rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $\overline{e}_3$ e':

$$R_{\pi/2}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, x_3),$$

percio' K viene mandato in se stesso.
(ii) Stessa conclusione come nel punto (i);
(iii) La rotazione $R_{\pi/2}$ attorno ad $-\overline{e}_1$ e' esattamente come la rotazione $R_{-\pi/2}$ attorno ad $\overline{e}_1$. Analoga conclusione come in (i) ed in (ii).
(iv) Se K viene mandato in se stesso, allora l'asse della rotazione e' uno dei seguenti:

(a) retta congiungente i centri di due facce opposte;
(b) retta congiungente i punti medi di due spigoli opposti;
(c) retta congiungente 2 vertici opposti.

Le rotazioni di tipo (a) sono di angoli $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Le rotazioni di tipo (b) devono mandare devono mandare gli spigoli che questo asse interseca in se stessi, percio' sono rotazioni di angolo $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Infine, le rotazioni di tipo (c) devono mandare i 3 lati uscenti da uno dei 2 vertici in loro stessi, cioe' i tre spigoli devono essere permutati fra loro. Percio' e' una rotazione di angolo $\frac{2k\pi}{3}$.

Esercizio 11: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ sia π il piano di equazione cartesiana

$$X_1 + X_2 = 1$$

e sia r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 & = & 0 \\ X_2 + X_3 & = & 1 \end{cases}.$$

Riflettere la retta r rispetto al piano π, calcolando esplicitamente le equazioni parametriche della retta $S_\pi(r)$ che e' la retta riflessa di r rispetto a π.

Svolgimento: Le coordinate di $P := \pi \cap r$ sono le soluzioni del sistema lineare di 3 equazioni e 3 incognite che si ottiene mettendo a sistema le equazioni cartesiane che definiscono π e r. Si ottiene $P = (-1/2, 3/2, -1/2)$. Un secondo punto sulla retta r e' ad esempio $Q = (-1, 1, 0)$.

La retta n che passa per Q e che e' ortogonale a π ha equazione parametrica:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Il punto di intersezione $n \cap \pi$ corrisponde al valore del parametro $t = 1/2$. Il riflesso Q' di Q rispetto a π corrisponde quindi a $t = 1$, ed abbiamo quindi $Q' = (0, 2, 0)$.

Poiche' la riflessione rispetto a π lascia fisso P, la retta cercata e' la retta che passa per P e per Q', che ha pertanto equazioni parametriche:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$