Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

SOLUZIONI FOGLIO 2 - Esercizi Riepilogativi

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$, per $\mathbb{R}^2$, con coordinate cartesiane (x, y).

Esercizio 1: Siano r_1 ed r_2 due rette passanti ambedue per il punto $p_0 = (2, -1)$ e rispettivamente per $q_1 = (18/5, 1/5)$ la prima e per $q_2 = (2, 1)$ la seconda. Assumiamo che tali rette siano tangenti ad una circonferenza $\mathcal{C}$ rispettivamente in q_1 ed in q_2.
(i) Determinare il centro C, il raggio r e l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$;
(ii) Disegnare la circonferenza $\mathcal{C}$.
Svolgimento: (i) Denotiamo con n_i la retta perependicolare alla retta r_i e passante per il punto q_i, $1 \leq i \leq 2$. Allora, il centro C sara' determinato dall'intersezione $n_1 \cap n_2$ mentre il raggio sara' dato dalla distanza $d(C, q_i)$, per uno qualsiasi dei due punti q_i, $1 \leq i \leq 2$.

Un vettore direttore di r_1 e' $(4, 3)$, percio' la retta n_1 ha equazione cartesiana $4x + 3y - 15 = 0$. Un vettore direttore di r_2 e' $(0, 1)$, percio' la retta n_2 ha equazione cartesiana $y - 1 = 0$. Allora $C = (3, 1)$ mentre $r = d(C, q_1) = d(C, q_2) = 1$.

L'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ e' data da $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$, cioe':

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0.$$

(ii) Per disegnare la circonferenza, basta considerare C e r.

Esercizio 2: Sia $\mathcal{Q}$ il trapezio in $\mathbb{R}^2$ di vertici: $(1, 1), \quad (6, 1), \quad (2, 3), \quad (3, 3)$.
(i) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la traslazione $T_{\mathbf{p}}$, dove $\mathbf{p} = (0, -1)$;
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la riflessione S_0 rispetto all'asse x_1;
(iii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione R_π di angolo π.
Svolgimento: (i) Si tratta del trapezio $\mathcal{Q}'$ di vertici $(1, 0), \quad (6, 0), \quad (2, 2), \quad (3, 2)$.
(ii) La matrice di S_0 e' data da

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(1,-1), \quad (6,-1), \quad (2,-3), \quad (3,-3).$
(iii) La matrice di R_π e' data da

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $B(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(-1,-1), \quad (-6,-1), \quad (-2,-3), \quad (-3,-3).$

Esercizio 3: Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato in $\mathbb{R}^2$ di vertici: $(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1).$
(i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato $\mathcal{Q}$ in se stesso?
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione $R_{\pi/4}0.$
Svolgimento: (i) Sono tutti gli angoli della forma $\varphi = k\frac{\pi}{2}$, con k un numero intero.
(ii) La matrice della rotazione $R_{\pi/4}$ e' data da:

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\mathcal{Q})$ e' il quadrato di vertici $(-\sqrt{2},0), \quad (0,\sqrt{2}), \quad (0,-\sqrt{2}), \quad (\sqrt{2},0).$

Esercizio 4: Siano $\mathbf{v} = (1,2)$ e $\mathbf{w} = (-1,-1)$.
(i) Calcolare l'orientazione della coppia ordinata $\{\mathbf{v}, \ \mathbf{w}\}$, i.e. $Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$;
(ii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse x. Calcolare $Or(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$;
(iii) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta passante per l'origine e formante un angolo φ con l'asse delle ascisse. Calcolare $Or(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$;
(iv) Sia R_ψ la rotazione di centro l'origine e angolo ψ. Calcolare $Or(R_\psi(\mathbf{v}), R_\psi(\mathbf{w}))$.
Svolgimento: (i) Osserviamo che

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 = Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$$

percio' la coppia ordinata e' orientata positivamente.
(ii) $Or(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w})) = det(S_0)Or(\mathbf{v},\mathbf{w}) = -1 = -Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$.
(iii) Come prima $Or(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w})) = det(S_\varphi) = -1 = -Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$.
(iv) $Or(R_\psi(\mathbf{v}), R_\psi(\mathbf{w})) = det(R_\psi) = 1 = Or(\mathbf{v},\mathbf{w})$.

Esercizio 5: (i) Scrivere le equazioni della rotazione $R = R_{P_0,\pi/6}$ di centro $P_0 = (1,2)$ ed angolo $\pi/6$;
(ii) Scrivere le equazioni della simmetria S_r rispetto alla retta

$$r : \quad x_1 - x_2 + 1 = 0;$$

(iii) Individuare la retta s per P_0 tale che $S_r \circ S_s = R$.

Svolgimento: (i) La matrice della rotazione di angolo $\pi/6$ attorno all'origine e':

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio', le formule di rotazione sono, in forma vettoriale, date da

$$\underline{x}' = A(\underline{x}) + P_0 - A(P_0),$$

equivalentemente in forma cartesiana

$$x' = 1/2(x - \sqrt{3}y + 1 + 2\sqrt{3}) \quad y' = 1/2(\sqrt{3}x + y + 2 - \sqrt{3}).$$

(ii) Sia $P = (x_0, y_0)$. La retta n passante per P e perpendicolare a r ha equazione cartesiana

$$x + y = x_0 + y_0.$$

Sia $N = r \cap n$, che ha coordinate

$$N = (\frac{1}{2}(x_0 + y_0 - 1), \frac{1}{2}(x_0 + y_0 + 1)).$$

Se poniamo $P' = (x_0', y_0')$ allora P' sara' il simmetico di P rispetto a r se e solo se $P' = 2N - P = (y_0 - 1, x_0 + 1)$.

Questo significa che le equazioni della simmetria sono

$$x' = y - 1 \quad y' = x + 1.$$

(iii) Se $S_r \circ S_s = R$, allora $S_s = S_r^{-1} \circ R = S_r \circ R$, perche' $S_r = S_r^{-1}$. Le equazioni di S_s sono quindi:

$$x' = 1/2(\sqrt{3}x + y) - \sqrt{3}/2 \quad y' = 1/2(x - \sqrt{3}y + 3) + \sqrt{3}.$$

La matrice A di S_s e'

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

ed ha autovettore relativo all'autovalore $\lambda = 1$, che e' $(1, 2 - \sqrt{3})$. Tale autovettore coincide con un vettore direttore della retta s che vogliamo determinare. Tale retta s avra' quindi equazione cartesiana

$$(2 - \sqrt{3})x - y + \sqrt{3} = 0.$$