Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi svolti per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2007/2008
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

FOGLIO 1 - Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Verificare che ogni matrice quadrata $n \times n$ M può essere scritta come somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.
Svolgimento. Ogni tale matrice M può essere scritta nella forma

$$M = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM).$$

Ponendo

$$A := \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

si osserva immediatamente che ${}^tA = A$ e ${}^tB = -B$, i.e. A è simmetrica mentre B è antisimmetrica.

Esercizio 2: Verificare le seguenti affermazioni:
(i) Una matrice quadrata $n \times n$ A è simmetrica (i.e. ${}^tA = A$) se e solo se, data una qualsiasi matrice quadrata $n \times n$ B, la matrice ${}^tBAB$ è simmetrica.
(ii) Una matrice quadrata $n \times n$ A è antisimmetrica (i.e. ${}^tA = -A$) se e solo se, data una qualsiasi matrice quadrata $n \times n$ B, ${}^tBAB$ è antisimmetrica.
Svolgimento. (i) Discende direttamente da

$${}^t({}^tBAB) = {}^tB\,{}^tA\,{}^t({}^tB) = {}^tB\,{}^tAB.$$

(iii) Si applica lo stesso calcolo di (ii).

Esercizio 3: Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, siano dati i vettori $\overline{v}_1 = (1, 2, -1),\ \overline{v}_2 = (1, 0, 1),\ \overline{v}_3 = (1, 2, 0)$ espressi in componenti rispetto alla base canonica e di $\mathbb{R}^3$.
(i) Determinare $||\overline{v}_1||$, il prodotto scalare $\langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle$ ed il coseno dell'angolo convesso formato da $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_3$.
(ii) Determinare tutti i vettori ortogonali al sottospazio generato da $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2)\}$ e tutti i vettori ortogonali a $\overline{v}_3$.

Svolgimento. (i) $||\overline{v}_1|| = \sqrt{6}$. Per definizione di prodotto scalare standard, si ha che

$$\langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle = 1 - 1 = 0,$$

cioè i due vettori sono ortogonali. Se infine θ denota l'angolo formato da $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_3$, ricordiamo che

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \overline{v}_2, \overline{v}_3 \rangle}{||\overline{v}_2||\, ||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

(ii) Poiché ortogonali, $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$. Pertanto, un vettore $\bar{t} = (x_1, x_2, x_3)$ è ortogonale al sottospazio generato da questi due vettori, denotato d'ora in poi con $Lin(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$, se e solo se,

$$\langle \bar{t}, \overline{v}_1 \rangle = \langle \bar{t}, \overline{v}_2 \rangle = 0.$$

Si ottiene così un sistema lineare

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = x_1 + x_3 = 0,$$

da cui si ricava che

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = -\alpha,\ x_3 = -\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Perció il luogo dei vettori cercati è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ dato da $Lin((1, -1, -1))$. Analogamente a prima, un vettore $\bar{t} = (x_1, x_2, x_3)$ è ortogonale a $\overline{v}_3$ se, e solo se, $\langle \bar{t}, \overline{v}_3 \rangle = 0$. Questo determina

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$

da cui si ricava che

$$x_1 = -2\lambda,\ x_2 = \lambda,\ x_3 = \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Perciò i vettori cercati formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Tale sottospazio è generato dai vettori

$$(-2, 1, 0) \text{ e } (0, 0, 1),$$

ottenuti ponendo, rispettivamente, $\lambda = 1, \mu = 0$ e $\lambda = 0, \mu = 1$.

Esercizio 4: Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale euclideo, munito di base canonica e, e prodotto scalare standard.
(i) Verificare che la base $f := \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ di $\mathbb{R}^3$, dove

$\overline{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}), \overline{u}_2 = (-\sqrt{2}/2\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}, \sqrt{2}/2\sqrt{3}), \overline{u}_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$

e' ortonormale.
(ii) Sia M la matrice cambiamento di base M_{ef} dalla base e alla base f, i.e. la matrice che ha per colonne le componenti dei vettori della base f espressi rispetto alla base e. Verificare che M è ortogonale.
Svolgimento. (i) Il fatto che ciascun vettore di f sia un versore, e' una verifica banale. Inoltre, anche la verifica di

$$\langle \overline{u}_i, \overline{u}_j \rangle = 0, \quad 1 \leq i \neq j \leq 3$$

e' una banale applicazione della definizione di prodotto scalare standard.
(ii) La matrice $M = M_{ef}$ è

$$M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -\sqrt{2}/2\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Calcolando $M\ {}^tM$ e ${}^tMM$ vediamo che ambedue i prodotti danno la matrice I_3. Pertanto M è ortogonale.

Esercizio 5: Sia $\mathbb{R}^2$ il piano vettoriale euclideo, munito di base canonica e, e prodotto scalare standard. Siano $\overline{v} = (1, 2)$ e $\overline{w} = (-1, -1)$ due vettori espressi in componenti rispetto alla base canonica e.
(i) Calcolare l'orientazione della coppia ordinata $\{\overline{v},\ \overline{w}\}$, i.e. $Or(\overline{v}, \overline{w})$;
(ii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse x_1. Calcolare $Or(S_0(\overline{v}), S_0(\overline{w}))$;
(iii) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta passante per l'origine e formante un angolo φ con l'asse x_1. Calcolare $Or(S_\varphi(\overline{v}), S_\varphi(\overline{w}))$;
(iv) Sia R_ψ la rotazione di centro l'origine e angolo ψ. Calcolare $Or(R_\psi(\overline{v}), R_\psi(\overline{w}))$.
Svolgimento: (i) Osserviamo che

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 = Or(\overline{v}, \overline{w})$$

percio' la coppia ordinata e' orientata positivamente.
(ii) $Or(S_0(\overline{v}), S_0(\overline{w})) = det(S_0) Or(\overline{v}, \overline{w}) = -1 = -Or(\overline{v}, \overline{w})$.
(iii) Come prima $Or(S_\varphi(\overline{v}), S_\varphi(\overline{w})) = det(S_\varphi) = -1 = -Or(\overline{v}, \overline{w})$.
(iv) $Or(R_\psi(\overline{v}), R_\psi(\overline{w})) = det(R_\psi) = 1 = Or(\overline{v}, \overline{w})$.

Esercizio 6: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, siano assegnati i punti

$$P = (1, 2), \ Q = (2, -1), \ R = (1, 0),$$

le cui coordinate sono scritte per comodita' per riga.
(i) Dopo aver verificato che i 3 punti formano i vertici di un triangolo $\mathcal{T}$, determinare l'area del triangolo $\mathcal{T}$.
(ii) Trovare il punto Q' simmetrico di Q rispetto a P e la retta $\underline{r}$ simmetrica rispetto a P della retta $\underline{r}_{RQ}$.
Svolgimento: (i) I tre punti non sono allineati. Quindi formano i vertici di un triangolo. Per trovare l'area del triangolo $\mathcal{T}$, si potrebbe considerare la risoluzione via Geometria Analitica considerando ad esempio il lato PQ del triangolo come la sua base b; l'altezza h e' ottenuta considerando la distanza punto-retta tra il punto R e la retta per i due punti P e Q. A questo punto, basta considerare $\frac{bh}{2}$.
Possiamo invece in forma alterantiva, calcolare l'area di tale triangolo utilizzando le formule con i valori assoluti di determinanti di opportune matrici 2×2, anche se il triangolo non ha un vertice nell'origine. Basta infatti calcolare le aree: a_1 del triangolo con vertici O, P, Q, a_2 del triangolo con vertici O, P, R ed a_3 del triangolo con vertici O, R, Q. L'area cercata sara' data da $a_1 - a_2 - a_3$.
(ii) Il punto Q' e' il punto, diverso da Q, che giace sulla retta per P e Q e che' e' a distanza pari a $d(P, Q)$ da P. La retta $\underline{r}$ e' la retta parallela alla retta per R e Q e che passa per Q' trovato precedentemente.

Esercizio 7: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, sia $\mathcal{Q}$ il trapezio di vertici: $(1, 1), \quad (6, 1), \quad (2, 3), \quad (3, 3)$.
(i) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la traslazione $T_{\overline{p}}$, dove il vettore $\overline{p} = (0, -1)$;
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la riflessione S_0 rispetto all'asse x_1;
(iii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione R_π di angolo π.
Svolgimento: (i) Si tratta del trapezio $\mathcal{Q}'$ di vertici $(1, 0), \quad (6, 0), \quad (2, 2), \quad (3, 2)$.
(ii) La matrice di S_0 e' data da

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(1, -1), \quad (6, -1), \quad (2, -3), \quad (3, -3)$.

(iii) La matrice di R_π e' data da

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $B(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(-1,-1), \quad (-6,-1), \quad (-2,-3), \quad (-3,-3)$.

Esercizio 8: Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato in $\mathbb{R}^2$ di vertici: $(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1)$.
(i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato $\mathcal{Q}$ in se stesso?
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.
Svolgimento: (i) Sono tutti gli angoli della forma $\varphi = k\frac{\pi}{2}$, con k un numero intero.
(ii) La matrice della rotazione $R_{\pi/4}$ e' data da:

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\mathcal{Q})$ e' il quadrato di vertici $(-\sqrt{2},0), \quad (0,\sqrt{2}), \quad (0,-\sqrt{2}), \quad (\sqrt{2},0)$.

Esercizio 9: Sia $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$.
(i) Scrivere le equazioni della rotazione $R_{P_0,\pi/6}$ di centro il punto $P_0 = (1,2)$ ed angolo $\pi/6$;
(ii) Scrivere le equazioni della simmetria S_r rispetto alla retta

$$r: \quad x_1 - x_2 + 1 = 0;$$

(iii) Verificare che la retta s, passante per P_0 e di equazione cartesiana

$$(2-\sqrt{3})x_1 - x_2 + \sqrt{3} = 0$$

e' tale che $S_r \circ S_s = R_{P_0,\pi/6}$.
Svolgimento: (i) La matrice della rotazione di angolo $\pi/6$ attorno all'origine e':

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio', le formule di rotazione sono, in forma vettoriale, date da

$$\underline{x}' = A(\underline{x}) + P_0 - A(P_0),$$

equivalentemente in forma cartesiana

$$x_1' = 1/2(x_1 - \sqrt{3}x_2 + 1 + 2\sqrt{3}) \quad x_2' = 1/2(\sqrt{3}x_1 + x_2 + 2 - \sqrt{3}).$$

(ii) Sia $P = (\alpha, \beta)$. La retta n passante per P e perpendicolare a r ha equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = \alpha + \beta.$$

Sia $N = r \cap n$, che ha coordinate

$$N = (\frac{1}{2}(\alpha + \beta - 1), \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)).$$

Allora P' sara' il simmetico di P rispetto a r se e solo se $P' = 2N - P = (\beta - 1, \alpha + 1)$. Questo significa che le equazioni della simmetria sono

$$x_1' = x_2 - 1 \quad x_2' = x_1 + 1.$$

(iii) Se deve essere $S_r \circ S_s = R_{P_0,\pi/6}$, allora $S_s = S_r^{-1} \circ R_{P_0,\pi/6} = S_r \circ R_{P_0,\pi/6}$, perche' $S_r = S_r^{-1}$. Le equazioni di S_s sono quindi:

$$x_1' = 1/2(\sqrt{3}x_1 + x_2) - \sqrt{3}/2 \quad x_2' = 1/2(x_1 - \sqrt{3}x_2 + 3) + \sqrt{3}.$$

Mediante questa trasformazione, notiamo che il luogo fissato da S_s e' proprio la retta s, come volevasi dimostrare.