Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

SOLUZIONI FOGLIO 1 - Esercizi Riepilogativi

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato una volta per tutte un riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ per $\mathbb{R}^2$ con coordinate cartesiane (x, y).

Esercizio 1: Sia $\underline{u} = (-1, 1)$. Determinare tutti i vettori $\underline{x}$ che sono ortogonali ad $\underline{u}$ e che hanno norma uguale a 2.
Svolgimento: $\underline{x} = (x_1, x_2)$ e' tale che $0 = \underline{u} \cdot \underline{x} = x_2 - x_1$; percio' $\underline{x} = (\alpha, \alpha)$.
Inoltre $||\underline{x}|| = 2$ implica $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Percio', i vettori cercati sono

$$\underline{x} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \ \text{ oppure } \ \underline{x} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Esercizio 2: Determinare tutte le rette passanti per $P = (-1, 2)$ e formanti con l'asse x_1 un angolo convesso pari a $\pi/3$. Determinare i due angoli convessi fra le due rette ottenute.
Svolgimento: Sia $\underline{r} = (l, m)$ un vettore direttore di una delle rette da determinare. Allora:

$$\frac{1}{2} = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\underline{r} \cdot (\pm\underline{e}_1)}{||\underline{r}|| \, ||\underline{e}_1||} = \frac{\pm l}{\sqrt{l^2 + m^2}},$$

che determina

$$l = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}m.$$

Otteniamo percio', a meno di proporzionalita', due vettori direttori:

$$\underline{r}_1 = (1, \sqrt{3}) \ \text{ e } \ \underline{r}_2 = (-1, \sqrt{3}).$$

Le equazioni cartesiane delle rette cercate sono date, rispettivamente, da:

$$det\begin{pmatrix} x+1 & y-2 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 0 \ \text{ e } \ det\begin{pmatrix} x+1 & y-2 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = 0.$$

Precisamente si determinano le due rette di equazioni cartesiane:

$$r_1 : \ \sqrt{3}x - y + 2 + \sqrt{3} = 0 \ \text{ e } \ r_2 : \ \sqrt{3}x + y - 2 + \sqrt{3} = 0.$$

Ora

$$cos(\theta(r_1, r_2)) = cos(\theta(\pm\underline{r}_1, \underline{r}_2)) = \pm\frac{1}{2},$$

quindi $\theta = \{\pi/3, 2\pi/3\}$.

Esercizio 3: Siano assegnate le rette:

$$\underline{s}_1 : \begin{cases} x = & 1 - 2t \\ y = & 2t, \ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{s}_2 : \ x - 2y + 1 = 0 \text{ e } \underline{s}_3 : \ 2x + y - 2 = 0.$$

(i) Determinare un'equazione cartesiana di $\underline{s}_1$;
(ii) Determinare un'equazione cartesiana della retta $\underline{r}$ parallela ad $\underline{s}_1$ e passante per $P_0 = \underline{s}_2 \cap \underline{s}_3$;
(iii) Determinare le equazioni parametriche della retta $\underline{n}$ per $P_1 = \underline{s}_1 \cap \underline{s}_2$ e perpendicolare a $\underline{s}_3$;
(iv) Verificare che la retta per i punti

$$Q_1 = (1, -1/4) \ e \ Q_2 = (2, 1/4)$$

e' parallela a $\underline{s}_2$. Tale retta coincide con $\underline{s}_2$?
Svolgimento: (i) Poiche' $y = 2t$, un' equazione cartesiana e' $x = 1 - y$, cioe' $x + y - 1 = 0$.
(ii) Per determinare il punto P_0 basta risolvere il sistema lineare non omogeneo

$$x - 2y + 1 = 2x + y - 2 = 0$$

che ha come soluzione

$$x = 3/5, \ y = 4/5.$$

Un vettore direttore della retta $\underline{s}_1$ e' $(-2, 2)$, equivalentemente $(-1, 1)$. Quindi, l'equazione cartesiana della retta che si vuole determinare sara' data da:

$$det \begin{pmatrix} x - \frac{3}{5} & y - \frac{4}{5} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

(iii) Per trovare le coordinate di P_1, basta sostituire nell'equazione di $\underline{s}_2$, $x = 1 - 2t$ e $y = 2t$, che determina $t = 1/3$, cioe' $x = 1/3, \ y = 2/3$. Un vettore normale a $\underline{s}_3$ e' $(2, 1)$, come si determina direttamente dalla sua equazione cartesiana. Percio' la retta cercata e' quella che passa per P_1 e che ha parametri direttori $(2, 1)$, cioe':

$$det \begin{pmatrix} x - \frac{1}{3} & y - \frac{2}{3} \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

(iv) Un vettore direttore della retta per Q_1 e Q_2 e' dato dal vettore $\overrightarrow{Q_1Q_2} = (1, 1/2)$. Quindi, un vettore direttore e' anche $(2, 1)$, che e' un vettore direttore anche di $\underline{s}_2$. Ora pero' la retta per Q_1 e Q_2 e' parallella a $\underline{s}_2$ ma non coincide con $\underline{s}_2$ perche', ad esempio, le coordinate di Q_1 non soddisfano l'equazione di $\underline{s}_2$.

Esercizio 4: Siano assegnati i punti

$$P = (1, 2), \ Q = (2, -1), \ R = (1, 0).$$

(i) Dopo aver verificato che i 3 punti formano i vertici di un triangolo $\mathcal{T}$, determinare l'area del triangolo $\mathcal{T}$.
(ii) Scrivere le equazioni delle mediane di $\mathcal{T}$ e delle tre altezze di $\mathcal{T}$.
(iii) Trovare il punto Q' simmetrico di Q rispetto a P e la retta $\underline{r}$ simmetrica rispetto a P della retta $\underline{r}_{RQ}$.
Svolgimento: (i) I tre punti non sono allineati. Quindi formano i vertici di un triangolo. Per trovare l'area del triangolo $\mathcal{T}$, basta calcolare con la formula di Capitolo 1 - Proposizione 1.7, a pagina 9 delle dispense, le aree: a_1 del triangolo con vertici O, P, Q, a_2 del triangolo con vertici O, P, R ed a_3 del triangolo con vertici O, R, Q.

L'area cercata sara' data da $a_1 - a_2 - a_3$.
(ii) Una mediana di un triangolo e' la retta che passa per un vertice del triangolo e per il punto medio del lato del triangolo che e' opposto a tale vertice. Per calcolare ad esempio la mediana uscente da P, basta calcolare la retta per P e per il punto medio del segmento QR, che ha coordinate $(3/2, -1/2)$. Analogamente per le altre mediane.

L'altezza di un triangolo uscente da un suo vertice e' la retta passante per il vertice e perpendicolare alla retta congiungente gli altri due vertici. Percio', l'altezza di $\mathcal{T}$ rispetto ad esempio al vertice P e' la retta per P e perpendicolare alla retta per i due punti Q e R. Analogamente per le altre altezze.
(iii) Il punto Q' e' il punto, diverso da Q, che giace sulla retta per P e Q e che' e' a distanza pari a $d(P, Q)$ da P. La retta $\underline{r}$ e' la retta parallela alla retta per R e Q e che passa per Q' trovato precedentemente.