Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria Edile/Architettura
Esercizi per il corso di GEOMETRIA 2 - a.a. 2006/2007
Docente: Prof. F. Flamini

FOGLIO 8 - Esercizi Riepilogativi

Nei seguenti esercizi, si considerino fissati una volta per tutte un riferimento affine per $\mathbb{R}^2$ con coordinate non-omogenee (x, y), un riferimento proiettivo per $\mathbb{P}^1$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ ed un riferimento proiettivo per $\mathbb{P}^2$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$.

Esercizio 1: Dopo aver determinato la proiettivita'

$$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$$

che manda i punti $[1, 0]$, $[0, 1]$ e $[1, 1]$ ordinatamente nei punti $[2, 3]$, $[2, -1]$ e $[0, 1]$, stabilire se f puo' essere una prospettivita'.

Esercizio 2: Siano $P, Q, R \in \mathbb{P}^1$ punti distinti. Costruire geometricamente una proiettivita' $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ t.c. $f(P) = Q$, $f(Q) = R$, $f(R) = P$.

Esercizio 3: In $\mathbb{R}^2$ sia data la conica affine di equazione

$$\mathcal{C} : \; x^2 + 2xy + y + x = 0.$$

(i) Scrivere l'equazione della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$, considerando $\mathcal{C}$ contenuta nella carta affine (o schermo) $A_0 = \{[x_0, x_1, x_2] \in \mathbb{P}^2 \mid x_0 \neq 0\}$.
(ii) Determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$.
(iii) Dedurre la classificazione affine e la forma canonica affine di $\mathcal{C}$.
(iv) Dedurre la forma canonica proiettiva della chiusura proiettiva di $\mathcal{C}$.

Esercizio 4: In $\mathbb{P}^2$ si consideri la conica proiettiva

$$\mathcal{D} : \; x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 = 0.$$

(i) Determinare la classificazione proiettiva di $\mathcal{D}$;
(ii) Scrivere le equazioni delle tre coniche dedotte da $\mathcal{D}$ nelle tre differenti carte affini (schermi) di $\mathbb{P}^2$: A_0, A_1 e A_2 e stabilire la natura affine delle tre coniche affini ottenute.

Esercizio 5: In $\mathbb{R}^2$ e' data la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana:

$$f(x, y) = 1 + 2y - 2xy.$$

(i) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$.
(ii) Determinare l'equazione della chiusura proiettiva $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e la sua forma canonica proiettiva.
(iii) Dai punti (i) ed (ii), dedurre la classificazione affine di $\mathcal{C}$.
(iv) Calcolare le equazioni cartesiane che la conica $\mathcal{D}$ definisce nelle altre due carte affini A_1 ed A_2.

Esercizio 6: In $\mathbb{R}^2$ e' data la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana:

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y - 1.$$

(i) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, determinare i punti impropri di $\mathcal{C}$.
(ii) Determinare l'equazione della chiusura proiettiva $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e la sua forma canonica proiettiva.
(iii) Dai punti (i) ed (ii), dedurre la classificazione affine di $\mathcal{C}$.
(iv) Sia $\mathcal{G}$ la conica proiettiva di equazione cartesiana $G(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, scrivere l'equazione del fascio di coniche proiettive generato da $\mathcal{D}$ e da $\mathcal{G}$.

Esercizio 7: In $\mathbb{R}^2$ e' data la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 6xy + 8\sqrt{2}x = 0.$$

(i) Determinare l'equazione cartesiana della chiusura proiettiva $\mathcal{D}$ di $\mathcal{C}$, vedendo $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(ii) Determinare l'equazione della conica definita da $\mathcal{D}$ nella carta affine A_1.
(iii) Se $\mathcal{G}$ denota la conica proiettiva di equazione cartesiana $x_0^2 + x_1^2 = 0$, trovare l'unica conica del fascio

$$\lambda\mathcal{D} + \mu\mathcal{G}$$

che passa per il punto $[1, 2, 1]$.

Esercizio 8: In $\mathbb{R}^2$ sono assegnate le due coniche

$$\mathcal{C} : x^2 - 1 = 0 \quad \mathcal{D} : x^2 - y^2 = 0.$$

(i) Determinare i loro punti impropri, vedendo $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 del piano proiettivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$;
(ii) Stabilire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono equivalenti dal punto di vista affine;
(iii) Se $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{D}}$ denotano rispettivamente le chiusure proiettive di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, classificare dal punto di vista proiettivo $\overline{\mathcal{C}}$ e $\overline{\mathcal{D}}$ e stabilire se sono proiettivamente equivalenti.