Proiezioni su vettori e su sottospazi. Complementi ortogonali.

---

1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, determinare il vettore proiezione ortogonale del vettore $v_1 = (1, 1, 0)$ sul vettore $v_2 = (1, 0, 1)$.

   Svolgimento: Il vettore w, proiezione ortogonale del vettore v_1 sul vettore v_2 e' per definizione il vettore multiplo di v_2 secondo il coefficiente
$$\langle v_1, v_2\rangle / ||v_2||^2.$$
   Poiche' $\langle v_1, v_2\rangle = 1$ e $||v_2|| = \sqrt{2}$, il vettore cercato e' $\pi_{v_2}(v_1) = (1/2, 0, 1/2)$.

2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, determinare la *proiezione ortogonale del vettore* $v = (0, 1, 2)$ *sul sottospazio* W generato dai vettori $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 0, 1)$ (che per **definizione** e' il vettore ottenuto come somma di tutte le proiezioni ortogonali $\pi_{\overline{f}_i}(\overline{v})$, dove $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k$, $k = \dim(W)$, e' una base ortogonale di W).

   Svolgimento: Notiamo che v_1 e v_2 sono una base ortogonale di W. Pertanto, il vettore richiesto w e' la somma dei vettori, $\pi_{v_1}(v)$ e $\pi_{v_2}(v)$, che sono rispettivamente le proiezioni ortogonali di v su v_1 e su v_2, cioe':
$$w = (\langle v, v_1\rangle/||v_1||)v_1 + (\langle v, v_2\rangle/||v_2||)v_2 = (1/2, 1/2, 2).$$
   Si verifica facilmente che il vettore $t := v - \pi_{v_1}(v) - \pi_{v_2}(v)$ e' ortogonale a v_1 e a v_2 e che $Lin(\{v_1, v_2, t\}) = Lin(\{v_1, v_2, t\})$.

3. Sia $\mathbf{R}^4$ munito del prodotto scalare standard.
   (a) Determinare il complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio cosi' definito:
$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0\}.$$
   (b) Verificare esplicitamente che $\mathbf{R}^4 = U \oplus U^\perp$.

   Svolgimento: (a) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U, cioe':
$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2x_2 - x_4 = x_4 = 0.$$
   Per esempio, una base di U e' data da $u = (1, 0, 1, 0)$. Allora, $U^\perp$ e' costitutito da tutti i vettori $t = (x_1, \ldots, x_4)$ tale che $t \cdot u = 0$, cioe' tali che risulti:
$$x_1 + x_3 = 0.$$
   Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U. Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da
$$u_1 = (1, 0, -1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0, 0), \quad u_3 = (0, 0, 0, 1).$$
   Pertanto $U^\perp = Lin(\{u_1, u_2, u_3\})$ e ritroviamo che ha dimensione 3, cioe' e' un iperpiano in $\mathbf{R}^4$.
   (b) Visto che il determinante della matrice che ha per colonne, rispettivamente, le coordinate di u, u_1, u_2 ed u_3, ha determinante $1 \neq 0$, allora l'insieme $\{u, u_1, u_2, u_3\}$ forma una base di $\mathbf{R}^4$, che verifica che $\mathbf{R}^4 = U \oplus U^\perp$, dato che necessariamente $U \cap U^\perp = \{(0, 0, 0, 0)\}$.