Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)
SPAZI VETTORIALI EUCLIDEI. ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT. ANGOLI CONVESSI FRA VETTORI
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, siano assegnati i vettori

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane del sottospazio $W = Lin\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$.
(ii) Costruire a partire dal sistema di vettori $f := \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ una base ortonormale per W.

Svolgimento. (i) Sia A la matrice che ha come colonne ordinatamente i tre vettori dati. Notiamo che $\det(A(1,2,3;1,2,3)) = 1 \neq 0$, pertanto i 3 vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(W) = 3$ ed f e' una sua base. Essendo W un iperpiano in $\mathbb{R}^4$, esso e' definito da un'unica equazione cartesiana che si ottiene semplicemente sviluppando

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 0 \\ X_2 & 1 & 1 & 2 \\ X_3 & 0 & 1 & 3 \\ X_4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

i.e.

$$3X_1 - 3X_2 + 3X_3 - X_4 = 0.$$

(ii) Notiamo ad esempio che $\langle \overline{f}_1, \overline{f}_2 \rangle = 1 \neq 0$, pertanto la base f non e' ortogonale. Mediante il procedimento di Gram-Schmidt possiamo determinare da f una base ortogonale. Poniamo

$$\overline{g}_1 = \overline{f}_1.$$

Pertanto

$$\overline{g}_2 := \overline{f}_2 - \frac{\langle \overline{f}_2, \overline{g}_1\rangle}{\langle \overline{g}_1, \overline{g}_1\rangle}\overline{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aanalogamente

$$\overline{g}_3 := \overline{f}_3 - \frac{\langle \overline{f}_3, \overline{g}_1\rangle}{\langle \overline{g}_1, \overline{g}_1\rangle}\overline{g}_1 - \frac{\langle \overline{f}_3, \overline{g}_2\rangle}{\langle \overline{g}_2, \overline{g}_2\rangle}\overline{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{3}\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Il sistema di vettori $g := \{\overline{g_1}, \overline{g}_2, \overline{g_3}\}$ costituisce una base ortogonale per W ma non ortonormale, dato che ad esempio $||\overline{g}_1|| = \sqrt{2}$. Per determinare una base ortonormale per W basta quindi ortonormalizzare i vettori della base g. Notiamo che

$$||\overline{g}_1|| = \sqrt{2},\ ||\overline{g}_2|| = \sqrt{\frac{3}{2}},\ ||\overline{g}_3|| = \frac{7}{3}\sqrt{3}.$$

Pertanto la base ortonormale cercata e' determinata dai vettori

$$\overline{h}_1 = \frac{\overline{g}_1}{||\overline{g}_1||} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{h}_2 = \frac{\overline{g}_2}{||\overline{g}_2||} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{h}_3 = \frac{\overline{g}_3}{||\overline{g}_3||} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/21 \\ -\sqrt{3}/21 \\ \sqrt{3}/21 \\ 4\sqrt{3}/7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^5, \langle,\rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle,\rangle$, sia U il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 = 0 \\ X_2 + X_4 - X_5 = 0 \end{cases}$$

Sia P l' operatore lineare su $\mathbb{R}^5$ dato dalla proiezione ortogonale sul sottospazio U. Determinare la matrice $M_e(P)$ cioe' la matrice rappresentativa dell'operatore P in base canonica e.

Svolgimento. (i) Notiamo che U e'

$$U = Lin\{\overline{u}_1 := \overline{e}_1, \overline{u}_2 := \overline{e}_2 + \overline{e}_3 - \overline{e}_4, \overline{u}_3 := \overline{e}_4 + \overline{e}_5\}.$$

Pertanto $U^\perp$ e' definito da equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 & = & 0 \\ X_2 + X_3 - X_4 & = & 0 \\ X_4 + X_5 & = & 0 \end{cases}$$

Pertanto, si ha ad esempio che $U^\perp = Lin\{\overline{w}_1 := -\overline{e}_2 + \overline{e}_3, \overline{w}_2 := \overline{e}_2 + \overline{e}_4 - \overline{e}_5\}$.

Consideriamo allora $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^\perp$ con base v data da

$$v := \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{w}_1, \overline{w}_2.$$

Pertanto la matrice cambiamento di base e'

$$M_{e,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per definizione di P, si ha:

$$M_v(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$M_e(P) = M_{e,v} M_v(P) M_{v,e} = M_{e,v} M_v(P) M_{e,v}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, siano dati i 5 vettori

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Denotato con $U = Lin\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4, \overline{v}_5\}$ il sottospazio vettoriale generato dai 5 vettori, determinare una base, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di U.
(ii) Ortogonalizzare la base di U determinata al punto (i).
(iii) Estendere la base ortogonale di U determinata al punto (ii) ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di $U^\perp$, il complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. (i) Notiamo che

$$\overline{v}_3 = \overline{v}_1 + \overline{v}_2,\ \overline{v}_4 = 2\overline{v}_1,\ \overline{v}_5 = \overline{v}_2 - \overline{v}_1$$

mentre $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$ non sono proporzionali. Pertanto $\dim(U) = 2$ ed una base di U e' proprio $u := \overline{v}_1, \overline{v}_2$. Pertanto, equazioni parametriche per U sono

$$X_1 = t + 2s,\ X_2 = 2t + s,\ X_3 = t + 3s,\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana per U si puo' determinare eliminando i parametri t ed s dalle precedenti equazioni parametriche scalari, oppure considerando direttamente

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

che fornisce $5X_1 - X_2 - 3X_3 = 0$.
(ii) Il primo vettore della base ortogonale di U e' $\overline{v}_1$. Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt abbiamo inoltre

$$\overline{w}_2 = \overline{v}_2 - \frac{\langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle}{||\overline{v}_1||^2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -8/6 \\ 11/6 \end{pmatrix}.$$

La base ortogonale per U e' quindi $\overline{v}_1, \overline{w}_2$.

(iii) Per estendere la base ortogonale di U ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ si puo' semplicemente considerare che l'equazione cartesiana di U e' $5X_1 - X_2 - 3X_3 = 0$. Poiche' tale equazione stabilisce che tutti i vettori $(a, b, c) \in U$ sono tali da soddisfare

$$5a - b - 3c = 0, \ \forall \ (a, b, c) \in U$$

questo significa in particolare che un vettore perpendicolare ad U e' :

$$\overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(iv) Si ha che $U^{\perp} = Lin\{\overline{w}_3\}$ pertanto equazioni parametriche sono

$$X_1 = 5t, \ X_2 = -t, \ X_3 = -3t, \ \ t \in \mathbb{R}$$

ed equazioni cartesiane sono

$$3X_2 - X_3 = 0 = X_1 + 5X_2.$$

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle \, , \, \rangle$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + X_4 & = & 0 \\ 2X_2 - X_4 & = & 0 \\ X_4 & = & 0 \end{cases}$$

(i) Determinare una base ortonormale di U.
(ii) Determinare l'equazione cartesiana del complemento ortogonale $U^{\perp}$ del sottospazio U.
(iii) Determinare una base ortonormale di $U^{\perp}$.
Svolgimento: (i) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U. Pertanto una base di U e' data da $\overline{u} = (1, 0, 1, 0)$. Quindi una base ortonormale di U e' data da $\overline{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$.
(ii) $U^{\perp}$ e' costituito da tutti i vettori $\overline{t} = (x_1, \ldots, x_4)$ tali che $\langle \overline{t}, \overline{u} \rangle = 0$, $\forall \ \overline{u} \in U$, cioe' tali che risulti:

$$X_1 + X_3 = 0.$$

Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U.

(iii) Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da

$$\overline{u}_2 = (1, 0, -1, 0), \quad \overline{u}_3 = (0, 1, 0, 0), \quad \overline{u}_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Pertanto $U^\perp = \mathrm{Lin}(\overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4)$ ritrovando che ha dimensione 3, cioe' che e' un iperpiano in $\mathbb{R}^4$. La base ortonormale si puo' estrarre direttamente dalla precedente. Infatti basta prendere

$$\overline{f}_2 = \overline{u}_2/||\overline{u}_2||, \quad \overline{f}_3 = \overline{u}_3, \quad \overline{f}_4 = \overline{u}_4$$

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle, \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle, \rangle$, sia U il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 & = & 0 \\ X_2 + X_4 & = & 0 \end{cases}$$

Sia P l'operatore lineare su $\mathbb{R}^4$ dato dalla proiezione ortogonale sul sottospazio U.
(i) Stabilire il rango di P.
(ii) Stabilire se P e' un operatore diagonalizzabile ed, in caso affermativo, trovare la sua forma diagonale in un opportuna base.
(ii) Determinare la matrice $M_e(P)$, cioe' la matrice rappresentativa dell'operatore P in base canonica e.
Svolgimento. (i) La codimensione di U in $\mathbb{R}^4$ e' 2, i.e. U e' un piano vettoriale. Pertanto P, essendo l'operatore di proiezione ortogonale su U ha necessariamente come immagine U, quindi P ha rango 2.
(ii) Dalle equazioni cartesiane di U si trova facilmente

$$U = Lin\{\overline{u}_1 := \overline{e}_1, \overline{u}_2 := \overline{e}_2 + \overline{e}_3 - \overline{e}_4\}.$$

Di conseguenza $Ker(P) = U^\perp$ che e' definito da equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 & = & 0 \\ X_2 + X_3 - X_4 & = & 0 \end{cases}$$

Pertanto, si ha ad esempio che $U^\perp = Lin\{\overline{u}_3 := -\overline{e}_2 + \overline{e}_3, \overline{u}_4 := \overline{e}_2 + \overline{e}_4\}$. Consideriamo allora $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^\perp$ con base u data da

$$u := \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4.$$

Per definizione di P, in base u si ha:

$$M_u(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi P e' diagonalizzabile, $M_u(P)$ e' la sua forma diagonale (in altri termini la base u e' una base diagonalizzante).

Esercizio 6. Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle\, , \,\rangle$ e di base canonica e. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} X_1 - X_2 & = & 0 \\ X_1 - X_4 & = & 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la dimensione di $U^\perp$, complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^4$, ed una base di $U^\perp$.

(ii) Sia dato il vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$, espresso in componenti rispetto alla base canonica e. Determinare il vettore $\pi_U(\overline{v})$ ottenuto per *proiezione ortogonale* di $\overline{v}$ *sul sottospazio* U (che per **definizione** e' il vettore ottenuto come somma di tutte le proiezioni ortogonali $\pi_{\overline{f}_i}(\overline{v})$, dove $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k$, $k = \dim(U)$, e' una base ortonormale di U).

(iii) Determinare $||\overline{v} - \pi_U(\overline{v})||$ e $\cos(\theta)$, dove θ denota l'angolo convesso tra i vettori $\overline{v}$ e $\pi_U(\overline{v})$.

Svolgimento: (i) Poiche' $\dim(U) = 2$, necessariamente $\dim(U^\perp) = 4 - 2 = 2$. In effetti $U^\perp$ e' generato dai vettori normali ai due iperpiani che costituiscono le equazioni cartesiane di U. Quindi $U^\perp := Lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) Una base per U e' data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, una base ortonormale di U e' quindi $f := \overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$. Pertanto

$$\pi_U(\overline{v}) = \langle \overline{f}_1, \overline{v} \rangle \overline{f}_1 + \langle \overline{f}_2, \overline{v} \rangle \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(iii) $||\overline{v} - \pi_U(\overline{v})|| = \frac{\sqrt{21}}{3}$ mentre $\cos(\theta) = \frac{\langle \overline{v}, \pi_U(\overline{v}) \rangle}{||\overline{v}|| \, ||\pi_U(\overline{v})||} = \frac{4}{30}\sqrt{30}$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle \, , \, \rangle$ e della base canonica e. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito dalle equazioni parametriche

$$W : \begin{cases} X_1 & = & s \\ X_2 & = & s \\ X_3 & = & t \end{cases}, \; s, t \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver verificato che il vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non appartiene a W, determinare il vettore *proiezione ortogonale* di $\overline{v}$ *sul sottospazio* W (che per **definizione** e' il vettore ottenuto come somma di tutte le proiezioni ortogonali $\pi_{\overline{f}_i}(\overline{v})$, dove $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k$, $k = \dim(W)$, e' una base ortonormale di W).

Svolgimento. E' ovvio che $\overline{v}$ non giace in W, dato che le sue componenti non soddisfano le equazioni parametriche di W. Una base per W e' data dai vettori $\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_2 =$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Facilmente si vede che tali vettori formano una base ortogonale per W. Le proiezioni ortogonali di $\overline{v}$ su tali vettori sono

$$\pi_{\overline{b}_1}(\overline{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \pi_{\overline{b}_2}(\overline{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\pi_W(\overline{v}) = \pi_{\overline{b}_1}(\overline{v}) + \pi_{\overline{b}_2}(\overline{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$. In effetti $\overline{v} - \pi_W(\overline{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ che e' proporzionale al vettore normale a W.

Esercizio 8. Sia $\underline{u} = (-1, 1)$. Determinare tutti i vettori $\underline{x}$ che sono ortogonali ad $\underline{u}$ e che hanno norma uguale a 2.

Svolgimento: $\underline{x} = (x_1, x_2)$ e' tale che $0 = \underline{u} \cdot \underline{x} = x_2 - x_1$; percio' $\underline{x} = (\alpha, \alpha)$.
Inoltre $||\underline{x}|| = 2$ implica $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Percio', i vettori cercati sono

$$\underline{x} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \ \text{ oppure } \ \underline{x} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Esercizio 9. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, siano dati i vettori $\overline{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\overline{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\overline{v}_3 = (1, 2, 0)$ espressi in componenti rispetto alla base canonica e di $\mathbb{R}^3$.
(i) Determinare $||\overline{v}_1||$, il prodotto scalare $\langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle$ ed il coseno dell'angolo convesso formato da $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_3$.
(ii) Determinare tutti i vettori ortogonali al sottospazio generato da $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2)\}$ e tutti i vettori ortogonali a $\overline{v}_3$.
Svolgimento. (i) $||\overline{v}_1|| = \sqrt{6}$. Per definizione di prodotto scalare standard, si ha che

$$\langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle = 1 - 1 = 0,$$

cioè i due vettori sono ortogonali. Se infine θ denota l'angolo formato da $\overline{v}_2$ e $\overline{v}_3$, ricordiamo che

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \overline{v}_2, \overline{v}_3 \rangle}{||\overline{v}_2||\ ||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

(ii) Poiché ortogonali, $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$. Pertanto, un vettore $\overline{t} = (x_1, x_2, x_3)$ è ortogonale al sottospazio generato da questi due vettori, denotato d'ora in poi con $Lin(\overline{v}_1, \overline{v}_2)$, se e solo se,

$$\langle \overline{t}, \overline{v}_1 \rangle = \langle \overline{t}, \overline{v}_2 \rangle = 0.$$

Si ottiene così un sistema lineare

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = x_1 + x_3 = 0,$$

da cui si ricava che

$$x_1 = \alpha,\ x_2 = -\alpha,\ x_3 = -\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Perció il luogo dei vettori cercati è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ dato da $Lin((1, -1, -1))$.
Analogamente a prima, un vettore $\overline{t} = (x_1, x_2, x_3)$ è ortogonale a $\overline{v}_3$ se, e solo se, $\langle \overline{t}, \overline{v}_3 \rangle = 0$. Questo determina

$$x_1 + 2x_2 = 0,$$

da cui si ricava che

$$x_1 = -2\lambda,\ x_2 = \lambda,\ x_3 = \mu,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Perciò i vettori cercati formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Tale sottospazio è generato dai vettori

$$(-2, 1, 0) \ \text{ e } \ (0, 0, 1),$$

ottenuti ponendo, rispettivamente, $\lambda = 1, \mu = 0$ e $\lambda = 0, \mu = 1$.