Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)
DIAGONALIZZABILITA' DI OPERATORI LINEARI (o ENDOMORFISMI)
Docente: Prof. F. Flamini

<u>Esercizi Riepilogativi Svolti</u>

Esercizio 1. Sia F l'operatore lineare sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ la cui matrice rappresentativa, rispetto alla base canonica e è $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ parametri indipendenti.
(i) Determinare i valori di a, b e c per cui F risulti essere diagonalizzabile.
(ii) Per siffatti valori, determinare una base v di $\mathbb{R}^4$ diagonalizzante per F e scrivere la matrice $M_v(f)$.
Svolgimento: (i) Dal testo dell'esercizio, abbiamo che $A := M_e(F)$. Per calcolare $P_F(T)$ basta calcolare $P_A(T)$. Questo polinomio è

$$P_A(T) = T^2(1-T)^2.$$

L'operatore f ha quindi due autovalori distinti: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$, entrambi di molteplicità algebrica 2.
Ora F sarà diagonalizzabile se, e solo se,

$$g(0) = 2 \quad \text{e} \quad g(1) = 2.$$

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = 0$, che scegliamo come primo, si deve risolvere il sistema omogeneo determinato dalle equazioni che rappresentano $Ker(F)$, i.e.:

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + 2X_3 + aX_4 & = & 0 \\ 2X_3 + bX_4 & = & 0 \\ X_3 + cX_4 & = & 0 \end{cases}$$

Denotata con B la matrice del precedente sistema, sappiamo che

$$g(0) = 4 - r(B).$$

Pertanto, $g(0) = 2$ se, e solo se, $r(B) = 2$. Imponendo a tutte le sottomatrici quadrate di ordine 3 di B di avere determinate nullo, si ottiene che

$$r(B) = 2 \Leftrightarrow b = 2c.$$

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$, si deve risolvere il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} -X_2 + 2X_3 + aX_4 & = & 0 \\ -X_2 + 2X_3 + bX_4 & = & 0 \\ cX_4 & = & 0 \\ -X_4 & = & 0 \end{cases}$$

Denotata con C la matrice del precedente sistema, vediamo che $r(C) = 2$ qualunque siano i valori di a, b e c. Pertanto, dalla relazione

$$g(1) = 4 - r(C)$$

si ha sempre $g(1) = 2$.
In conclusione, F è diagonalizzabile se, e solo se, i parametri a, b, c sono t.c.

$$b = 2c.$$

(ii) Se in A andiamo a sostituire $b = 2c$ e calcoliamo le basi dei relativi autospazi, abbiamo che

$$V_0(f; a, c) = Span((1, 1, 0, 0),\ (0, a - 2c, -c, 1))$$

e

$$V_1(f; a, c) = Span((1, 0, 0, 0),\ ((0, 2, 1, 0)).$$

Quali che siano i valori di $a, c \in \mathbb{R}$, i quattro vettori sopra descritti costituiscono sempre una base $v_{a,c}$ per $\mathbb{R}^4$, con a, c variabili in $\mathbb{R}$. In ciascuna di queste basi $v_{a,c}$, abbiamo sempre

$$M_{v_{a,c}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Sia $F \in End(\mathbb{R}^3)$ che, in base canonica e, si rappresenta con la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare gli autovalori di F ed i rispettivi autospazi, specificando per ogni autovalore la molteplicità algebrica e geometrica.

(ii) Stabilire se F è diagonalizzabile. In caso affermativo, trovare una base v per $\mathbb{R}^3$ di autovettori di F e la matrice $M_v(F)$. In caso contrario, determinare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dagli autovettori di F.

Svolgimento. Dal testo dell'esercizio, abbiamo che $A := M_e(F)$. Dalla teoria generale, sappiamo che il polinomio caratteristico di un operatore lineare è invariante rispetto ai cambiamenti di base. Pertanto, per calcolare $P_F(T)$ basta calcolare $P_A(T)$. Questo polinomio è

$$P_A(T) = (T+1)^2(T+2).$$

L'operatore f ha quindi due autovalori distinti: $\lambda_1 = -1$, di molteplicità algebrica $a(-1) = 2$, e $\lambda_2 = -2$, di molteplicità algebrica $a(-2) = 1$.

Per determinare l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = -1$, che scegliamo come primo, si deve risolvere il sistema omogeneo

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 3X_3 & = & 0 \\ X_1 + 2X_3 & = & 0 \\ X_1 + 2X_3 & = & 0 \end{cases}$$

Il rango della matrice dei coefficienti del sistema è manifestamente 2. Dal Teorema di Rouché-Capelli, sappiamo subito che $dim\ V_{-1}(f) = 3 - 2 = 1$. Infatti, questo sistema fornisce l'autovettore $\overline{v}_1 = (-2, -1, 1)$, le cui componenti sono rispetto alla base canonica e di $\mathbb{R}^3$. Pertanto $V_{-1}(F) = Lin(\overline{v}_1)$ e quindi $g(\lambda_1) = 1$.

Poiché l'autovalore $\lambda_2 = -2$ è un'autovalore semplice, possiamo affermare con certezza che $g(\lambda_2) = 1$. Infatti, l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_2 = -2$ si determina mediante il sistema

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 + 3X_3 & = & 0 \\ X_1 + X_2 + 2X_3 & = & 0 \\ -X_1 - X_3 & = & 0 \end{cases}$$

Questo sistema fornisce l'autovettore

$$\overline{v}_2 = (1, 1, -1),$$

i.e. $V_{-2}(f) = Lin(\overline{v}_2)$.
(ii) Poiché $g(\lambda_1) < a(\lambda_1)$, l'operatore f non può essere diagonalizzabile. In effetti, entrambi gli autospazi erano delle rette vettoriali di $\mathbb{R}^3$, quindi non può esistere una base per $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f, dato che i due autovettori di F generano solamente il piano vettoriale

$$Lin(\overline{v}_1, \overline{v}_2).$$

Esercizio 3. Si consideri l'operatore lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (equivalentemente l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$), definito sui vettori della base canonica come

$$F(\overline{e}_1) = -\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + \overline{e}_3,\ F(\overline{e}_2) = -3\overline{e}_1 + 4\overline{e}_2 + \overline{e}_3,\ F(\overline{e}_3) = 3\overline{e}_1 - 3\overline{e}_2 - \overline{e}_3.$$

(i) Determinare la matrice $A := M_e(F)$ che rappresenta l'applicazione lineare F nella base canonica e. (ii) Determinare il polinomio caratteristico di F, calcolando la molteplicita' algebrica e geometrica di ciascun autovalore di F.
(iii) Stabilire se F e' diagonalizzabile. In caso di risposta affermativa, scrivere la forma diagonale di A in un'opportuna base diagonalizzante. (iv) Stabilire se $\overline{e}_1 - \overline{e}_2$ e' autovettore di F e determinare l'insieme $F^{-1}(\overline{e}_1 - \overline{e}_2)$ delle controimmagini di $\overline{e}_1 - \overline{e}_2$.

Svolgimento. (i) La matrice e' $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
(ii) Il polinomio caratteristico di un operatore F e' invariante per classi di simipitudine, pertanto

$$P_F(T) = P_A(T) = (T-2)(1-T^2).$$

Tale polinomio ha come soluzioni i tre autovalori semplici $2, 1, -1$. Pertanto ciascun autovalore ha molteplicita' algebrica e geometria uguale ad uno.
(iii) Da quanto osservato al punto (ii), la matrice A e' sicuramente diagonalizzabile ed, in un opportuna base di autovettori, la sua forma diagonale e'

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Notiamo che $F(\overline{e}_1 - \overline{e}_2) = 2(\overline{e}_1 - \overline{e}_2)$. Pertanto $\overline{e}_1 - \overline{e}_2$ e' autovettore di autovalore 2. Poiche' F e' un automorfismo di $\mathbb{R}^3$ (cioe' e' biiettiva) allora $F^{-1}(\overline{e}_1 - \overline{e}_2)$ sara' costituito da un solo vettore. Precisamente $F^{-1}(\overline{e}_1 - \overline{e}_2) = \{\frac{1}{2}\overline{e}_1 - \frac{1}{2}\overline{e}_2\}$.

Esercizio 4. Si consideri l'operatore lineare $F \in End(\mathbb{R}^3)$, la cui matrice rappresentativa nella base canonica e':

$$A := M_e(F) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che A ammette come autovalore $\lambda = 0$ con molteplicita' algebrica 1.
(ii) Senza svolgere conti, dedurre dalla risposta (i) se F e' un automorfismo di $\mathbb{R}^3$ e la dimensione di $Ker(F)$.
(iii) Dato $\overline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, stabilire se $\overline{b}$ appartiene a $Im(F)$ ed, in caso affermativo, determinare l'insieme $F^{-1}(\overline{b})$ delle controimmagini del vettore $\overline{b}$ (i.e. di tutti i vettori nel dominio di F la cui immagine e' il vettore $\overline{b}$).

Svolgimento. (i) Notiamo che A e' una matrice antisimmetrica. Pertanto $\det(A) = tr(A) = 0$. Per definizione di polinomio caratteristico, abbiamo allora che $PA(T)$ e' della forma $P_A(T) = T^3 - cT$ con $c \neq 0$ altrimenti A sarebbe la matrice nulla. Pertanto $\lambda = 0$ e' uno zero semplice di $P_A(T)$.
(ii) Il $Ker(F)$ non e' altro che l'autospazio relativo all'autovalore nullo. Poiche' tale autovalore e' semplice, necessariamente si deve avere $\dim(Ker(F)) = 1$. Inoltre si deduce che pertanto che F non e' un automorfismo in quanto non iniettivo e non suriettivo, dato che $\dim(Im(F)) = 2$.
(iii) Considerando la matrice completa C ottenuta orlando A con la colonna data dal vettore $\overline{b}$, si ottiene facilmente che $rg(A) = rg(C) = 2$. In effetti il vettore $\overline{b}$ e' la somma delle 3 colonne di A, quindi necessariamente $\overline{b} \in Im(F)$. Per determinare l'insieme delle controimmagini si deve risolvere il sistema lineare di tre equazioni e tre indeterminate

$$-X_2 + 2X_3 = 1 \quad X_1 + X_3 = 4 \quad -2X_1 - 3X_2 = -5.$$

Il sistema lineare e' sicuramente compatibile e di rango 2, pertanto dal teorema di Rouche'-Capelli, le sue soluzioni dipenderanno da 3-2 = 1 parametro libero. In altri termini esisteranno ∞^1 vettori nel dominio che hanno come immagine $\overline{b}$. Possiamo porre $X_3 = t$ ottenendo cosi' che il generico vettore nell'insieme $F^{-1}(\overline{b})$ e' della forma:

$$\begin{pmatrix} 4-3t \\ -1+2t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 5. Si consideri l'operatore lineare $F \in End(\mathbb{R}^5)$ definito sui vettori della base canonica come

$$F(\overline{e}_1) = F(\overline{e}_2) = F(\overline{e}_3) = F(\overline{e}_4) = F(\overline{e}_5) = \overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3 + \overline{e}_4 + \overline{e}_5.$$

(i) Determinare la matrice $A := M_e(F)$ che rappresenta l'applicazione lineare F nella base canonica e.
(ii) Senza svolgere conti, determinare il polinomio caratteristico di F, calcolando la molteplicita' algebrica di ciascun autovalore di F.
(iii) Stabilire se F e' diagonalizzabile e scrivere la forma diagonale che F assume nell'eventuale base diagonalizzante.
Svolgimento. (i) La matrice e'

$$A := M_e(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) La matrice A ha manifestamente rango 1 e quindi $\dim(Ker(F)) = 4$. Pertanto l'autovalore $\lambda = 0$ deve avere molteplicita' algebrica almeno 4. Se tale molteplicita' algebrica fosse 5, la matrice A sarebbe la matrice nulla, il che e' manifestamente assurdo. Pertanto $P_A(T) = T^4(T-c)$, per un opportuno $c \in \mathbb{R}^*$. Dal teorema di Hamilton-Cayley si ha $P_A(T) = T^4(T-5)$ in quanto $tr(A) = 5$. Ne segue che gli autovalori di A sono $\lambda = 0$ di molteplicita' algebrica e geometrica 4 e $\lambda = 5$ che e' un autovalore semplice.

(iii) Visto che per ogni autovalore di A la molteplicita' algebrica coincide con la molteplicita' geometrica, A e' sicuramente diagonalizzabile ed, in un'opportuna base, la sua forma diagonale risultera'

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$