Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)
CONTROIMAGINI DI VETTORI E INTERPRETAZIONE DI ROUCHE'-CAPELLI E DI NULLITA'+RANGO
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Siano V e W due spazi vettoriali di dimensioni $dim(V) = 3$ e $dim(W) = 4$, rispettivamente. Sia

$$T : V \to W$$

l'applicazione lineare che, rispetto alle basi $e = \overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, per V, e $f = \overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3, \overline{f}_4$, per W, si rappresenta con la matrice

$$M_{f,e}(T) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare $dim(Im(T))$.
(ii) Stabilire se T e' iniettiva e se T e' suriettiva.
(iii) Determinare, quando possibile, equazioni cartesiane dei sottospazi $Ker(T) \subset V$ e $Im(T) \subset W$.
(iv) Determinare equazioni parametriche (rispetto alla base e) del sottoinsieme

$$T^{-1}(\overline{f}_2 + 2\overline{f}_3) \subset V$$

delle controimmagini del vettore $\overline{f}_2 + 2\overline{f}_3 \in W$.
Svolgimento: (i) Notiamo che la matrice A ha rango 2. Infatti
- la I e la IV riga di A sono proporzionali,
- la III riga di A e' uguale alla II - I.

Ne segue che $rg(A) = 2$. Quindi $dim(Im(T)) = 2$.
(ii) Visto che $rg(A) = dim(Im(T)) = 2$, T non puo' essere suriettiva. Inoltre, dal teorema di Nullita' piu' Rango, abbiamo

$$dim(Ker(T)) = dim(V) - dim(Im(T)) = 3 - 2 = 1$$

quindi T non e' nemmeno iniettiva.

(iii) La I e la II colonna di A determinano una base di $Im(T)$. Pertanto, equazioni cartesiane per $Im(T)$ sono

$$Y_1 - 2Y_2 + Y_3 = 2Y_1 - Y_4 = 0,$$

dove le Y_i sono le indeterminate in W relative alla scelta di f.

Per le equazioni cartesiane di $Ker(T)$ basta scrivere il sistema omogeneo $AX = O$. Eliminando le equazioni linarmente dipendenti dalle altre, tale sistema e' equivalente a

$$X_2 + X_3 = X_1 - X_3 = 0.$$

(iv) Notiamo che le componenti in base f del vettore $\overline{f}_2 + 2\overline{f}_3$ sono $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare equazioni parametriche del sottoinsieme dato equivale a trovare la soluzione del sistema

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice completa del sistema ha rango 2, pertanto il sistema e' compatibile e la soluzione generale dipende da 3 - 2 = 1 parametro. Precisamente

$$X_1 = t + 1, \; X_2 = -t, \; X_3 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita come

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare la matrice A che rappresenta l'applicazione lineare F nelle rispettive basi canoniche di dominio e codominio.
(ii) Stabilire se F e' suriettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane e parametriche per il sottospazio $Im(F) \subset \mathbb{R}^3$.
(iii) Stabilire se F e' iniettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane e parametriche per il sottospazio $Ker(F) \subset \mathbb{R}^4$.

Svolgimento. (i) La matrice A e' semplicemente $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) Notiamo che $rg(A) = 2$ dato che la III riga e' data da $2I + 2II$ mentre I e II riga sono indipendenti. Pertanto F non puo' essere suriettiva. Precisamente abbiamo $\dim(Im(F)) = 2$. Una base di $Im(F)$ e' costituita ad esempio dalla I e dalla II colonna di A. Pertanto, equazioni parametriche per $Im(F)$ sono date da

$$\overline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mentre, nelle coordinate di $\mathbb{R}^3$, equazioni cartesiane di $Im(F)$ sono date da $2X_1+2X_2-X_3 = 0$.

(iii) Poiche' il dominio ha dimensione strettamente maggiore del codominio di F, sicuramente l'applicazione non puo' essere iniettiva. Precisamente, per il Teorema di Nullita' + Rango, abbiamo anche che $\dim(Ker(F)) = 4 - \dim(Im(F)) = 2$. Nelle coordinate di $\mathbb{R}^4$, equazioni cartesiane per il nucleo sono date dall'insieme delle controimmagini del vettore nullo, e quindi da

$$X_1 - X_2 + X_4 = 0 = X_2 + X_3 - X_4.$$

Le soluzioni di questo sistema lineare forniscono $Ker(F) = Lin \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Infine, equazioni parametriche per $Ker(F)$ sono $\overline{x} = \begin{pmatrix} -s \\ t-s \\ s \\ t \end{pmatrix}$, $s, t, \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita sui vettori della base canonica e come

$$F(\overline{e}_1) = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 - \overline{e}_3,\ F(\overline{e}_2) = \overline{e}_2 + \overline{e}_3,\ F(\overline{e}_3) = 2\overline{e}_1 - 2\overline{e}_3.$$

(i) Determinare la matrice $A := M_e(F)$ che rappresenta l'endomorfismo F nella base canonica e.

(ii) Stabilire se F e' suriettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane e parametriche per il sottospazio $Im(F) \subset \mathbb{R}^3$.
(iii) Stabilire se F e' iniettiva. In caso di risposta negativa, trovare una base, equazioni cartesiane e parametriche per il sottospazio $Ker(F) \subset \mathbb{R}^3$.

Svolgimento. (i) La matrice A e' semplicemente $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
(ii) Notiamo che $rg(A) = 2$. Pertanto F non puo' essere suriettiva. Precisamente abbiamo $\dim(Im(F)) = 2$. Una base di $Im(F)$ e' costituita ad esempio dalla I e dalla II colonna di A, dato che $\det(A(1,2|1,2)) \neq 0$. Pertanto, equazioni parametriche per $Im(F)$ sono date da

$$\overline{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mentre, nelle coordinate di $\mathbb{R}^3$, equazioni cartesiane di $Im(F)$ sono date da $X_1 - X_2 + X_3 = 0$.
(iii) Per il Teorema di Nullita' + Rango, abbiamo anche che $\dim(Ker(F)) = 3 - \dim(Im(F)) = 1$, pertanto F non e' nemmeno iniettivo. Nelle coordinate di $\mathbb{R}^3$, equazioni cartesiane per il nucleo sono date da

$$X_1 + X_3 = 0 = X_1 - X_2.$$

Le soluzioni di questo sistema lineare forniscono $Ker(F) = Lin \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, pertanto equazioni parametriche per $Ker(F)$ sono $X_1 = t, X_2 = t, X_3 = -t$.

Esercizio 4. Si consideri l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, la cui matrice rappresentativa nella base canonica di dominio e codominio e':

$$A := M_{e,e}(F) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se F e' un isomorfismo di $\mathbb{R}^3$ in se'.
(ii) In caso di risposta negativa al punto (i), determinare $\dim(Ker(F))$ e $\dim(Im(F))$.

(iii) Dato $\overline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, stabilire se $\overline{b} \in Im(F)$.

(iv) In caso affermativo al punto (iii), determinare l'insieme $F^{-1}(\overline{b})$ delle controimmagini del vettore $\overline{b}$ (i.e. di tutti i vettori nel dominio di F la cui immagine e' il vettore $\overline{b}$).

Svolgimento. (i) Notiamo che $\det(A) = 0$. Infatti se C_i denota la i-esima colonna di A, abbiamo $C_3 = 4C_1 - C_2$. Pertanto il rango di F, che e' una nozione invariante dai cambiamenti di base, e' 2 e F non puo' essere un automorfismo.

(ii) Per definizione di rango di un operatore, $\dim(Im(F)) = 2$ e, dal teorema di Nullita' piu' Rango, $\dim(Ker(F)) = 3 - 2 = 1$.

(iii) Sostituendo la colonna C_3 di A con le componenti del vettore $\overline{b}$ si ottiene la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

il cui determinante e' sempre 0. Pertanto, dal teorema di Rouche'-Capelli, $\overline{b} \in Im(F)$ dato che $rg(A) = rg(A\overline{b})$.

(iv) Determinare l'insieme delle controimmagini equivale a risolvere il sistema lineare di tre equazioni e tre indeterminate

$$X_1 + 4X_2 = 5 \quad 2X_1 + X_2 + 7X_3 = 3 \quad - X_1 + 5X_2 - 9X_3 = 4.$$

Il sistema lineare e' sicuramente compatibile e di rango 2, pertanto dal teorema di Rouche'-Capelli, le sue soluzioni dipenderanno da 3-2 = 1 parametro libero. In altri termini esisteranno ∞^1 vettori nel dominio che hanno come immagine $\overline{b}$. Possiamo porre $X_3 = t$ e risolvere il sistema dedotto

$$2X_1 + X_2 = 3 - 7t \quad - X_1 + 5X_2 = 4 + 9t.$$

Utilizzando ad esempio il metodo di Cramer, si ha:

$$X_1 = 1 - 4t, \quad X_2 = 1 + t.$$

Questi valori soddisfano banalmente anche la terza equazione del sistema originario $X_1 + 4X_2 = 5$, quindi il generico vettore nell'insieme $F^{-1}(\bar{b})$ e' della forma:

$$\begin{pmatrix} 1-4t \\ 1+t \\ t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$