Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)
SOTTOSPAZI, EQUAZIONI PARAMETRICHE E CARTESIANE, CAMBIAMENTI DI BASE
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica e, siano assegnati i seguenti vettori, espressi in componenti rispetto alla base e:

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Estrarre da tale sistema di vettori una base v per $\mathbb{R}^3$.
(ii) Considerato il vettore $\overline{u} = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 5\overline{e}_3$, calcolare le componenti di $\overline{u}$ rispetto alla base v trovata al punto (i).
(iii) Determinare le componenti del vettore $\overline{w} \in \mathbb{R}^3$ in base e sapendo che, rispetto alla base v, esso ha componenti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Svolgimento. (i) Notiamo che $\overline{v}_3 = 2\overline{v}_1 + 3\overline{v}_2$. Mentre $\det(\overline{v}_1\ \overline{v}_2\ \overline{v}_4) = -1 \neq 0$. Prendiamo AD ESEMPIO

$$v = \overline{v}_1,\ \overline{v}_4,\ \overline{v}_2$$

in quest'ordine (sarebbe andato bene anche $\overline{v}_1,\ \overline{v}_2,\ \overline{v}_4$).
(ii) Presa $v := \overline{v}_1,\ \overline{v}_4,\ \overline{v}_2$, abbiamo $M_{e,v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Pertanto $M_{e,v}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Quindi le componenti in base v sono date da

$$M_{e,v}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2\overline{v}_1 - 2\overline{v}_4 + 3\overline{v}_2.$$

(iii) $\overline{w} = 1\overline{v}_1 + 1\overline{v}_4 + 1\overline{v}_2 = (4, 2, 5) = 4\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 + 5\overline{e}_3$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica e, siano assegnati i vettori

$$\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

espressi in componenti rispetto alla base canonica e:
(i) Verificare che i tre vettori costituiscono una base u per $\mathbb{R}^3$.
(ii) Siano dati i vettori $\overline{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, le cui componenti si intendono rispetto alla base e. Verificare che sono linearmente indipendenti e trovare le loro componenti rispetto alla base u.
(iii) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ dotato di base u e siano Y_1, Y_2, Y_3 le coordinate nel riferimento $(\mathbb{R}^3, u)$. Trovare le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio

$$W := Lin\{\overline{x}, \overline{y}\}$$

nelle coordinate Y_1, Y_2, Y_3.
(iv) Trovare un qualsiasi vettore $\overline{z}$ non appartenente a W e scrivere le componenti di $\overline{z}$ in base e.

Svolgimento. (i) Notiamo che la matrice che ha come colonne i vettori di u e' la matrice $M_{e,u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, che ha determinante uguale a -2. Pertanto u e' una base.
(ii) L'indipendenza lineare di vettori e' un concetto indipendente dalla rappresentazione di essi in componenti rispetto ad una base. Pertanto, la matrice 3×2 che ha per colonne le componenti dei vettori $\overline{x}, \overline{y}$ in base e ha manifestamente rango 2. Questo implica che i due vettori sono linearmente indipendenti.

Per trovare le componenti di questi vettori in base u, si puo' procedere indifferentemente utilizzando la matrice inversa di $M_{e,u}$ oppure esprimendo i vettori $\overline{x}, \overline{y}$ come combinazione lineare dei vettori di u. Si ottiene cosi'

$$\overline{x} = \overline{u}_1 - \overline{u}_2 + 2\overline{u}_3, \quad \overline{y} = 2\overline{u}_2 + \overline{u}_3.$$

(iii) Con queste componenti, abbiamo che W e' descritto dalle equazioni parametriche

$$Y_1 = t,\ Y_2 = -t + 2s,\ Y_3 = 2t + s$$

e dall'equazione cartesiana

$$5Y_1 + Y_2 - 2Y_3 = 0.$$

(iv) Notiamo che, nelle cooordinate date nel riferimento $(\mathbb{R}^3, u)$, il vettore $\overline{u}_1$ ha componenti $\overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esse non soddisfano l'equazione cartesiana di W. Pertanto, si puo' scegliere $\overline{z} = \overline{u}_1$, le cui componenti in base e sono gia' note.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito della base canonica e, siano assegnati i seguenti vettori:

$$\overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui componenti sono espresse rispetto ad e. Sia

$$W := Lin\left(\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3\right).$$

(i) Determinare la dimensione di W, estraendo dal sistema di generatori dato una base b per W.
(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di W.
(iii) Determinare una base di un sottospazio di $\mathbb{R}^4$ supplementare a W.
Svolgimento. (i) I vettori dati sono banalmente linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^4$. Basta calcolare il rango della matrice A del sistema dei tre vettori dati rispetto ad e. Tuttavia considerando la sottomatrice $A(1, 2|1, 2)$, notiamo che essa ha determinante non nullo. Pertanto

$$\dim(W) = rg(A) = 2$$

ed una base b per W e' ad esempio costituita dai vettori $b := \overline{w}_1, \overline{w}_2$.
(ii) Imponendo la condizione

$$rg(A_1\ A_2\ X) = 2,$$

dove A_i e' la colonna i-esima di A ed X la colonna delle indeterminate, si ottengono le equazioni cartesiane di W, che sono

$$2X_1 + X_3 = 0 = X_1 - 2X_2 + X_4.$$

Risolvendo il sistema lineare, si trovano anche equazioni parametriche per W, cioe'

$$x_1 = t,\ x_2 = s,\ x_3 = -2t,\ x_4 = -t + 2s.$$

(iii) Un sottospazio supplementare a W in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2. Una base per tale spazio e' quindi costituita ad esempio dai vettori $\overline{e}_1$ e $\overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$ che entrambi non soddisfano le equazioni cartesiane di W e sono manifestamente linearmente indipendenti.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito della base canonica e, siano assegnati i seguenti vettori:

$$\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \overline{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

le cui componenti sono espresse rispetto ad e. Sia

$$U := Lin\left(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3\right).$$

(i) Determinare la dimensione di U, estraendo dal sistema di generatori dato una base b per U.
(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di U.
(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $W \subset U$ determinato dalla retta vettoriale di vettore direttore $\overline{b}_1$.
Svolgimento. (i) I vettori dati sono banalmente linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^4$. Basta calcolare il rango della matrice A del sistema dei tre vettori dati rispetto ad e. Tuttavia considerando la sottomatrice $A(1,2|2,3)$, notiamo che essa ha determinante non nullo. Pertanto

$$\dim(W) = rg(A) = 2$$

ed una base b per W e' ad esempio costituita dai vettori $b := \overline{b}_2, \overline{b}_3$.
(ii) Imponendo la condizione

$$rg(A_2\ A_3\ X) = 2,$$

dove A_i e' la colonna i-esima di A ed X la colonna delle indeterminate, si ottengono le equazioni cartesiane di U, che sono

$$2X_1 + X_3 = 0 = X_1 - 2X_2 + X_4.$$

Risolvendo il sistema lineare, si trovano anche equazioni parametriche per U, cioe'

$$x_1 = t,\ x_2 = s,\ x_3 = -2t,\ x_4 = -t + 2s.$$

(iii) Le equazioni parametriche di W sono ovviamente

$$X_1 = 2h, X_2 = h, X_3 = -4h, X_4 = 0.$$

Poiche' $W \subset U$ e dal fatto che U e' un piano vettoriale, e' sufficiente trovare un'ulteriore equazione cartesiana di un iperpiano che tagli W su U che sia linearmente indipendente dalle due equazioni cartesiane trovate al punto (ii) che definiscono U. Guardando l'espressione parametrica del generico vettore di W, notiamo che vale la relazione ulteriore $X_4 = 0$. Pertanto equazioni cartesiane di W sono date dal sistema 3 equazioni e 4 indeterminate:

$$2X_1 + X_3 = 0 = X_1 - 2X_2 = 0 = X_4.$$

Esercizio 5. In $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica e, siano assegnati i seguenti vettori:

$$\overline{v}_1 = (0, 1, -1),\ \overline{v}_2 = (1, 0, 1),\ \overline{v}_3 = (1, -1, 3),$$

le cui componenti sono espresse rispetto ad e.
(i) Verificare che $\overline{v}_1,\ \overline{v}_2,\ \overline{v}_3$ sono generatori per $\mathbb{R}^3$ e che sono linearmente indipendenti.
(ii) Considerato il vettore $\overline{w}$ che, rispetto ad e, ha componenti $\overline{w} = (1, 0, 2)$, calcolare le componenti di $\overline{w}$ rispetto alla base v data dai vettori $\overline{v}_1,\ \overline{v}_2,\ \overline{v}_3$.
(iii) Determinare le componenti del vettore $\overline{u} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base e sapendo che, rispetto alla base v, esso ha coordinate $(1, -2, 1)$.
Svolgimento. (i) I vettori dati sono banalmente linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$. Basta calcolare il determinanate della matrice del sistema dei tre vettori dati rispetto ad e. Siccome sono tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$, non possono che generare tutto lo spazio vettoriale, i.e. sono una sua base.
(ii) Ponendo

$$\overline{w} = (1, 0, 2) = c_1(0, 1, -1) + c_2(1, 0, 1) + c_3(1, -1, 3)$$

si trova

$$c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1;$$

queste sono le componenti di $\overline{w}$ rispetto alla base v.
(iii) $\overline{u} = 1\overline{v}_1 - 2\overline{v}_2 + \overline{v}_3 = (-1, 0, 0)$, che sono le sue componenti rispetto alla base canonica e.

Esercizio 6. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato della base canonica e, siano assegnati i vettori:

$$\overline{v}_1 = \overline{e}_1 - \overline{e}_3 + \overline{e}_4,\ \overline{v}_2 = \overline{e}_2 - \overline{e}_4,\ \overline{v}_3 = \overline{e}_3 + \overline{e}_4.$$

(i) Verificare che i tre vettori sono linearmente indipendenti.
(ii) Determinare un vettore $\overline{v}_4 \in \mathbb{R}^4$ tale che valgano contemporaneamente le condizioni:
(a) $v := \{\overline{v}_1,\ \overline{v}_2,\ \overline{v}_3,\ \overline{v}_4\}$ sia una base di $\mathbb{R}^4$, e
(b) il vettore $\overline{w}$, che ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base e, abbia coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base v.
Svolgimento. (i) La matrice che ha per colonne le coordinate del sistema dei tre vettori dati rispetto alla base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Immediatamente osserviamo che $r(A) = 3$, dato che

$$det\ A(1, 2, 3; 1, 2, 3) = 1 \neq 0;$$

quindi i tre vettori sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$.
(ii) Consideriamo ora un arbitrario vettore $\overline{v}_4 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, le cui coordinate sono sempre rispetto alla base e. La matrice del sistema di vettori $v = \ \overline{v}_1,\ \overline{v}_2,\ \overline{v}_3,\ \overline{v}_4$ rispetto ad e è

la matrice

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{pmatrix}.$$

Affinchè v sia una base, si deve avere $det\ C \neq 0$. Pertanto, sviluppando il determinate di C con il metodo di Laplace rispetto alla prima riga, otteniamo che $\mathcal{V}$ è una base non appena

$$-2a + b - c + d \neq 0.$$

Questa è la prima relazione che otteniamo dalla condizione (a) del testo. Pertanto, per ogni scelta di $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ soddisfacenti la condizione $-2a + b - c + d \neq 0$ si ottiene sempre una base v di $\mathbb{R}^4$. Per tali valori, C si può considerare come la matrice cambiamento di base da e a v.
Dalla condizione (ii), vogliamo scegliere v di modo che valga

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 1 & c \\ 1 & -1 & 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si ottiene pertanto

$$a = 1,\ b = 1,\ c = -2,\ d = -2$$

che in effetti soddisfa la condizione $-2a + b - c + d \neq 0$. In definitiva $\underline{v}_4 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 - 2\underline{e}_3 - 2\underline{e}_4$.
Esercizio 7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato della base canonica e, siano dati i due sottospazi

$$U : \quad \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 & = & 0 \\ X_1 + X_4 & = & 0 \end{cases}$$

e

$$W = Lin \left\{ \overline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Determinare $\dim(U)$, $\dim(W)$ ed opportune basi dei due sottospazi.
(ii) Determinare equazioni parametriche di U ed equazioni parametriche e cartesiane di W.
(iii) Stabilire se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

Svolgimento. (i) Notiamo che $\overline{w}_3 = 4\overline{w}_1 + 3\overline{w}_2$, mentre i primi due vettori che definiscono W non sono proporzionali. Pertanto $\dim(W) = 2$ ed una base per W e' proprio $w := \overline{w}_1, \overline{w}_2$.
Risolvendo ora il sistema lineare dato dalle equazioni cartesiane che definiscono U si ha che la soluzione generale del sistema e'

$$\overline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\bar{b}_1 + s\bar{b}_2, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(ii) Dal punto precedente, equazioni parametriche di U sono:

$$X_1 = t, X_2 = s, X_3 = -t + s, X_4 = -t, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, equazioni parametriche di W sono:

$$X_1 = a + 2b, X_2 = 0, X_3 = -2b, X_4 = a - 2b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

e quindi equazioni cartesiane di W sono

$$X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 = X_2.$$

(ii) Per determinare $U \cap W$ si mettono a sistema le equazioni cartesiane di U e di W e si ottiene

$$U \cap W = Lin \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Quindi $\mathbb{R}^4$ non e' somma diretta di U con W. Eppure, facilmente si vede che $U + W = \mathbb{R}^4$.