

Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria

Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)

QUADRICHE DI \mathbb{R}^3 .

Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Classificare dal punto di vista affine la quadrica Σ di \mathbb{R}^3 , di equazione cartesiana

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - 3X_1 - 3X_2 + 2 = 0.$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.

Svolgimento: Un POSSIBILE modo (alternativo a quello usuale) in questo caso puo' essere il seguente. Quando il polinomio che rappresenta la quadrica è abbastanza semplice, possiamo usare dei metodi rapidi. Ad esempio, osserviamo che l'equazione di Σ si può scrivere anche come

$$(X_1 + X_2)^2 - 3(X_1 + X_2) + 2 = 0.$$

Ponendo $t := X_1 + X_2$ si ottiene l'equazione di secondo grado in t ,

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Tale equazione ha le due soluzioni $t = 1$ e $t = 2$. Ciò significa che possiamo fattorizzare il polinomio in t come

$$t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0.$$

Risostituendo $t = X_1 + X_2$ in questa fattorizzazione, abbiamo quindi

$$(X_1 + X_2)^2 - 3(X_1 + X_2) + 2 = (X_1 + X_2 - 1)(X_1 + X_2 - 2) = 0.$$

Questo significa che la quadrica Σ è costituita da due piani paralleli; infatti le equazioni cartesiane dei due piani non sono proporzionali ed entrambi hanno giacitura $X_1 + X_2 = 0$. Quindi Σ è di tipo (16) nella tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche.

Un modo alternativo per la classificazione affine è invece quello di notare che la matrice simmetrica completa \tilde{A} ha rango 2. Pertanto Σ è doppiamente degenere. Inoltre, la

matrice A della forma quadratica associata a Σ ha rango 1. Perciò, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche, deduciamo che o la quadrica è della tipologia (15) e quindi è priva di punti reali oppure è della tipologia (16), ed è quindi costituita da due piani paralleli. Facilmente si vede che Σ contiene il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi

Σ deve essere necessariamente di tipo (16).

Ne segue che, in un opportuno riferimento di \mathbb{R}^3 , $(O; w_1, w_2, w_3)$, dove le w_i sono le coordinate in tale riferimento per $1 \leq i \leq 3$, la forma canonica affine di Σ sarà $W_1^2 = 1$.

Esercizio 2: Dedurre la forma canonica affine della quadrica

$$\Sigma : X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2 + 4X_1 - 2 = 0.$$

Svolgimento: Un POSSIBILE modo (alternativo a quello usuale) per risolvere l'esercizio è il seguente. Osserviamo che Σ si può scrivere come

$$(X_1^2 + 4X_1 + 4 - 4) + X_2^2 - 2X_3^2 - 2 = 0,$$

ossia

$$(X_1 + 2)^2 + X_2^2 - 2X_3^2 - 6 = 0.$$

Se facciamo la sostituzione

$$Y_1 = X_1 + 2, \quad Y_2 = X_2, \quad Y_3 = X_3,$$

che equivale a traslare l'origine del riferimento, in tali nuove coordinate l'equazione di Σ diventa

$$\frac{Y_1^2}{6} + \frac{Y_2^2}{6} - \frac{Y_3^2}{3} = 1.$$

Visto che una traslazione è un'isometria, la precedente equazione è una forma canonica metrica contenuta nella tabella fondamentale per la classificazione metrica delle quadriche. Quindi Σ è un iperboloide iperbolico (i.e. ad una falda). Pertanto, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche, la sua forma canonica affine sarà in opportune coordinate

$$W_1^2 + W_2^2 - W_3^2 = 1.$$

Esercizio 3: Riconoscere la tipologia affine della quadrica

$$\Sigma : X_1^2 - 4X_2^2 - 2X_3 = 0.$$

- (i) Dedurre che Σ contiene due schiere di rette. Descrivere le rette di tali schiere.
 (ii) Determinare equazioni di ciascuna delle due rette, una per ogni schiera, passanti per il punto $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Svolgimento: Notiamo che il rango della matrice simmetrica completa associata a Σ è 4. Pertanto la quadrica è generale. Il rango della matrice simmetrica A associata alla forma quadratica \mathcal{Q} di Σ è invece 2. Pertanto, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine, la quadrica Σ o è di tipo (5), i.e. è un paraboloide generale ellittico, oppure è di tipo (6), i.e. un paraboloide generale iperbolico.

Ricordiamo ora che il segno del determinante di una quadrica Σ è una proprietà affine. Vediamo che una quadrica nella tipologia (5) ha tale determinante che è $\det \tilde{A} = -\frac{1}{a^2b^2} < 0$, mentre nella tipologia (6) il determinante è $\det \tilde{A} = \frac{1}{a^2b^2} > 0$. Calcolando la matrice \tilde{A} della quadrica Σ data, vediamo che il suo determinante è 4. Pertanto, Σ è necessariamente di tipo (6), i.e. è un paraboloide iperbolico o ad una falda.

(i) Dalla teoria generale, sappiamo che un paraboloide generale iperbolico contiene due schiere di rette. Possiamo trovare esplicitamente equazioni per queste schiere. Infatti, se scriviamo l'equazione di Σ come

$$(X_1 + 2X_2)(X_1 - 2X_2) = 2X_3.$$

Allora, si vede che Σ contiene le 2 famiglie di rette:

$$l_t : X_1 + 2X_2 - tX_3 = X_1 - 2X_2 - (2/t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e

$$m_s : X_1 - 2X_2 - sX_3 = X_1 + 2X_2 - (2/s) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che, per ogni $t \neq t'$, l_t e $l_{t'}$ sono sghembe mentre per ogni t e s come sopra, l_t e m_s si intersecano in un punto.

(ii) Il passaggio per N comporta che $t = 1$ e $s = 1$, cioè si hanno la retta l_1 e la retta m_1 delle due schiere distinte.

Esercizio 4: Stabilire la natura delle quadrica Σ , di equazione cartesiana

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + X_1 + X_3 = 1.$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.

Svolgimento: Proponiamo una risoluzione alternativa e più geometrica spiegata a lezione (lo studente può procedere nella risoluzione standard che conosce).

La matrice associata alla parte omogenea di grado 2 di Σ ha rango 1. Pertanto, dalla classificazione, abbiamo che in tal caso Σ è o un cilindro parabolico, o due piani paralleli o due piani coincidenti oppure la quadrica vuota. Facilmente si vede che Σ contiene

punti reali, per esempio $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; quindi non può essere vuota.

Consideriamo il piano di equazione

$$X_1 + X_3 - 1 = 0.$$

Mettendo a sistema con l'equazione di Σ , si ottiene

$$X_1 + X_3 - 1 = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0,$$

cioè

$$X_1 + X_3 - 1 = (X_1 + X_2)^2 = 0$$

che è l'intersezione di un piano e di un piano contato 2 volte. Tale intersezione è pertanto una retta contata due volte. Non è difficile accorgersi che il piano $X_1 + X_3 - 1 = 0$ è il piano tangente a Σ nel punto P . Quindi Σ è necessariamente un cilindro parabolico. Infatti, se fosse stata o due piani paralleli o due piani coincidenti, questa intersezione sarebbe risultata uno dei piani costituenti Σ , contato con molteplicità.

La forma canonica affine di Σ è, in un opportuno riferimento,

$$Z_1^2 = Z_2.$$

Esercizio 5: Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 , con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, sia data la quadrica Σ di equazione cartesiana

$$\Sigma : X_1^2 + 2X_2^2 - 9X_3^2 - 4 = 0.$$

(i) Verificare che Σ è un iperboloide iperbolico.

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane delle schiere di rette contenute in Σ .

(iii) Trovare le 2 rette delle schiere passanti per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e l'equazione cartesiana dell'ellisse di gola.

Svolgimento: (i) Con i soliti metodi, si determina che $rg(\tilde{A}) = 4$, $rg(A) = 3$ e che le soluzioni di $Q(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 2X_2^2 - 9X_3^2 = 0$ non si riducono alla sola soluzione nulla. Pertanto Σ e' un iperboloide. Calcolando il piano tangente nel punto $P = (2, 0, 0) \in \Sigma$ si ottiene l'equazione del piano τ_P :

$$X_1 - 2 = 0.$$

Considerando l'intersezione di Σ con il piano τ_P , si ottiene la conica sezione

$$\begin{cases} X_1^2 + 2X_2^2 - 9X_3^2 - 4 = 0 \\ X_1 - 2 = 0 \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{cases} 2X_2^2 - 9X_3^2 = 0 \\ X_1 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Quest'ultimo sistema si scrive anche come

$$\begin{cases} (\sqrt{2}X_2 - 3X_3)(\sqrt{2}X_2 + 3X_3) = 0 \\ X_1 - 2 = 0 \end{cases},$$

pertanto e' manifesto che la conica sezione si spezza in una iperbole semplicemente degenere, i.e. la coppia di rette incidenti nel punto P :

$$\begin{cases} (\sqrt{2}X_2 - 3X_3) = 0 \\ X_1 - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} (\sqrt{2}X_2 + 3X_3) = 0 \\ X_1 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Pertanto, dallo studio delle sezioni tangenziali degli iperboloidi, si deduce che Σ e' un iperboloide iperbolico.

(ii) Possiamo scrivere l'equazione di Σ come $X_1^2 - 9X_3^2 = -2X_2^2 + 4 = 0$. Questo fornisce le due schiere di rette

$$\begin{cases} X_1 - 3X_3 = t(2 - \sqrt{2}X_2) \\ X_1 + 3X_3 = \frac{1}{t}(2 + \sqrt{2}X_2) \end{cases}, t \in \mathbb{R}^*$$

6

e

$$\begin{cases} X_1 - 3X_3 = s(2 + \sqrt{2}X_2) \\ X_1 + 3X_3 = \frac{1}{s}(2 - \sqrt{2}X_2) \end{cases}, s \in \mathbb{R}^*.$$

(iii) Imporre il passaggio per P fornisce $t = s = 1$ pertanto le rette di ciascuna schiera passanti per P si ottengono per tali valori. Tali rette sono ESATTAMENTE quelle determinate come sezione tangenziale nel punto P per la classificazione di Σ .

per quel che riguarda l'ellisse di gola, visto che l'iperboloide ha come assi di simmetria gli assi cartesiani, le uniche sezioni piane con piani paralleli ad i piani principali che determinano ellissi sono quelle con piani paralleli a $X_3 = 0$. Ne segue che l'ellisse di gola ha equazione

$$\mathcal{D}: \frac{X_1^2}{4} + \frac{X_2^2}{2} - 1 = 0 = X_3.$$

Esercizio 6 Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 sia data la quadrica Σ di equazione

$$2X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2 + 4X_1X_3 - X_3 = 0.$$

Riconoscere il tipo di quadrica e scrivere, in un opportuno riferimento di coordinate (z_1, z_2, z_3) , la forma canonica affine di Σ .

Svolgimento: Proponiamo anche qui una soluzione geometrica, che utilizza alcuni degli argomenti on-line di approfondimento. La matrice simmetrica associata alla parte omogenea di grado due della quadrica Σ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha pertanto

$$\det A = 0 \text{ e } r(A) = 2.$$

Se calcoliamo il polinomio caratteristico di A , si ha $P_A(T) = \det(A - TI) = -T(T-2)(T-4)$. Perciò, le soluzioni di tale polinomio sono

$$0, 2, 4.$$

Quindi, i due autovalori non-nulli di A hanno stesso segno. Dalla classificazione affine delle quadriche si ha perciò che Σ è o

(a) una quadrica vuota, oppure

- (b) una retta contata due volte, oppure
- (c) un cilindro ellittico, oppure
- (d) un paraboloido ellittico.

Procediamo per esclusioni. Poiché l'origine O appartiene banalmente a Σ , allora la possibilità (a) viene scartata. Se intersechiamo Σ con il piano di equazione

$$X_1 + X_3 = 0$$

troviamo come curva intersezione

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 0 \\ 2X_2^2 - X_3 = 0 \end{cases}$$

che è una curva intersezione di un piano e di un cilindro parabolico, perciò anche la possibilità (b) viene scartata. Sia ora α il piano di equazione

$$X_3 = 0.$$

Intersecando Σ con α si ottiene

$$\begin{cases} X_3 = 0 \\ 2X_1^2 + 2X_2^2 = 0 \end{cases}$$

che è solo il punto origine O . Facilmente si vede che α è il piano tangente a Σ in O ; pertanto si deduce che l'unica possibilità per Σ è (d). Infatti, se Σ fosse una retta doppia, non sarebbe definito un piano tangente in O mentre se fosse un cilindro ellittico, il piano tangente in un qualsiasi suo punto P è costante lungo tutta la retta generatrice del cilindro passante per P , e quindi la curva intersezione sarebbe la stessa generatrice contata con molteplicità 2. Quindi le possibilità (b) e (c) devono per forza escludersi.

(ii) Dal punto precedente, si deduce immediatamente che la forma canonica affine di Σ è, nelle opportune coordinate,

$$Z_1^2 + Z_2^2 = Z_3.$$

Esercizio 7. Studiare le sezioni della quadrica Σ di equazione cartesiana

$$X_1 X_2 = X_3$$

con i piani paralleli ai piani coordinati e riconoscere il tipo di quadrica.

Svolgimento: Intersecando Σ con i piani della forma $X_3 = k$, con $k \in \mathbb{R}$, si ottengono iperboli equilateri, per $k \neq 0$, aventi asintoti paralleli agli assi coordinati x_1 e x_2 , mentre per $k = 0$ si ottiene la coppia di tali assi coordinati.

Intersecando con i piani paralleli a $X_1 = 0$, si ottengono ∞^1 rette di equazioni cartesiane

$$X_1 - t = X_2 - \frac{1}{t}X_3 = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Intersecando con i piani paralleli a $X_2 = 0$ si ottengono ∞^1 rette di equazioni cartesiane

$$X_2 - s = X_1 - \frac{1}{s}X_3 = 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La quadrica Σ è quindi una quadrica doppiamente rigata. Fra le quadriche doppiamente rigate ci sono l'iperboloide generale iperbolico (o, ad una falda) oppure il paraboloido generale iperbolico (o, a sella). Poichè la matrice simmetrica associata alla forma quadratica Q di Σ è di rango 2, allora Σ è necessariamente un paraboloido iperbolico.

Esercizio 8. Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 , con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, si consideri la quadrica Σ di equazione cartesiana

$$8X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 6X_1X_2 - 2X_1X_3 + X_1 - X_3 = 0.$$

(i) Classificare Σ .

(ii) Dedurre la forma canonica affine di Σ , in opportune coordinate (z_1, z_2, z_3) di \mathbb{R}^3 .

(iii) Riconoscere la tipologia della conica \mathcal{C} ottenuta intersecando la quadrica Σ con il piano α di equazione cartesiana $X_1 - X_3 = 0$.

(iv) Motivare la presenza su Σ della conica \mathcal{C} sia dal punto di vista geometrico dell'intersezione $\Sigma \cap \alpha$, sia in relazione a quanto trovato al punto (i).

Svolgimento: (i) La matrice completa della quadrica Σ e' la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 8 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il determinante di \tilde{A} con il metodo di Laplace rispetto ad esempio alla prima riga, otteniamo

$$\det(\tilde{A}) = 1 > 0.$$

Pertanto, Σ e' una quadrica generale ed il segno del determinante della matrice simmetrica completa (che e' un invariante metrico ed affine di Σ) e' positivo.

Per quanto riguarda la matrice simmetrica A associata alla forma quadratica di Σ , essa ha manifestamente rango 2.

Dalla tabella della classificazione, deduciamo che Σ e' necessariamente un paraboloide iperbolico (o a sella).

(ii) La sua forma canonica affine, in opportune coordinate, e'

$$Z_1^2 - Z_2^2 = Z_3.$$

(iii) Se intersechiamo Σ con il piano α otteniamo il sistema

$$5X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 = X_1 - X_3 = 0.$$

Ponendo $t = X_2/X_1$, l'equazione

$$5X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 = 0$$

diventa

$$t^2 + 6t + 5 = 0$$

che si fattorizza in

$$(t + 1)(t + 5) = 0.$$

Pertanto, il precedente sistema si fattorizza in:

$$r : X_1 + X_2 = X_1 - X_3 = 0$$

e

$$s : X_2 + 5X_1 = X_1 - X_3 = 0.$$

In definitiva, la conica sezione \mathcal{C} e' una conica semplicemente degenera costituita dalle due rette r e s incidenti nell'origine e contenute in Σ .

(iv) In effetti dal punto (i), Σ e' doppiamente rigata, quindi r appartiene alla prima schiera di Σ e s appartiene alla seconda schiera di Σ .

Il fatto che la conica \mathcal{C} si spezzi in queste due rette discende direttamente dal fatto che α e' manifestamente il piano tangente a Σ nell'origine. Questo si dimostra o calcolando esplicitamente le derivate parziali del polinomio che definisce Σ , valutate in O , oppure basta osservare che l'equazione di Σ ha la parte lineare che e' $X_1 - X_3$; pertanto, poiche' lo sviluppo con il polinomio di Taylor attorno ad O fornisce un polinomio che

coincide con l'equazione di Σ , questo comporta che l'annullamento dei termini lineari dell'equazione di Σ , i.e. $X_1 - X_3 = 0$, coincide con la varietà lineare che "meglio" approssima la quadrica Σ in O , i.e. il suo piano tangente.

Esercizio 9. Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 , con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, sia data la quadrica Σ di equazione cartesiana

$$\Sigma : 4X_1^2 - 2X_2^2 + X_3^2 = 1.$$

- (i) Classificare Σ e verificare che Σ contiene due schiere di rette \mathcal{R} e \mathcal{S} .
(ii) Data la retta ℓ , non contenuta in Σ , di equazione cartesiana

$$X_1 - X_2 = 0 = X_1 - X_3,$$

determinare i punti $\{P_1, P_2\} = \Sigma \cap \ell$ e trovare i valori dei parametri che individuano le rette della schiera \mathcal{R} e della schiera \mathcal{S} che passano per P_1 e per P_2 rispettivamente.

- (iii) Classificare e determinare le forme canoniche metriche delle tre coniche ottenute, ciascuna, come intersezione di Σ con uno dei piani coordinati del riferimento $RC(O; x_1, x_2, x_3)$.

Svolgimento: (i) La quadrica Σ è un iperboloide iperbolico o ad una falda. L'equazione di Σ si può anche scrivere come:

$$4X_1^2 - 2X_2^2 = 1 - X_3^2.$$

Fattorizzando in prodotti di termini lineari i due membri della precedente eguaglianza ed utilizzando opportuni parametri, si ottengono le equazioni delle due schiere:

$$\mathcal{R} : 2X_1 + \sqrt{2}X_2 - t(1 + X_3) = 0 = 2X_1 - \sqrt{2}X_2 - \frac{1}{t}(1 - X_3), \quad t \in \mathbb{R}^*$$

e

$$\mathcal{S} : 2X_1 + \sqrt{2}X_2 - s(1 - X_3) = 0 = 2X_1 - \sqrt{2}X_2 - \frac{1}{s}(1 + X_3), \quad s \in \mathbb{R}^*.$$

- (ii) Sostituendo nell'equazione di Σ le relazioni $X_1 = X_2$ e $X_1 = X_3$, si ottiene $3X_1^2 - 1 = 0$ che verifica che ℓ non è contenuta in Σ in quanto i due punti di intersezione di $\Sigma \cap \ell$ sono $P_1 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ e $P_2 = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3)$. Per trovare i valori dei parametri s e t basta sostituire nelle equazioni delle due schiere i due punti.

- (iii) La conica sezione con il piano coordinato $X_1 = 0$ è la conica

$$X_1 = -2X_2^2 + X_3^2 - 1 = 0.$$

Questa e' chiaramente un'iperbole generale nel piano $X_1 = 0$. Con la trasformazione di coordinate

$$X_1 = W_1, X_2 = W_3, X_3 = W_2$$

si ottiene la forma canonica metrica

$$W_1 = W_2^2 - \frac{W_3^2}{\frac{1}{2}} - 1 = 0.$$

La conica sezione con il piano coordinato $X_3 = 0$ e' la conica

$$X_2 = 4X_1^2 + X_3^2 - 1 = 0.$$

Questa e' chiaramente un'ellisse generale a punti reali nel piano $X_2 = 0$. Si ottiene immediatamente la forma canonica metrica

$$X_2 = \frac{X_1^2}{\frac{1}{4}} + X_3^2 - 1 = 0.$$

La conica sezione con il piano coordinato $X_3 = 0$ e' la conica

$$X_3 = 4X_1^2 - 2X_2^2 - 1 = 0.$$

Questa e' chiaramente un'iperbole generale nel piano $X_3 = 0$. Si ottiene immediatamente la forma canonica metrica

$$X_3 = \frac{X_1^2}{\frac{1}{4}} - \frac{X_2^2}{\frac{1}{2}} - 1 = 0.$$

Esercizio 10. Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 , con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, si consideri la quadrica

$$\Sigma : 8X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 6X_1X_2 - 2X_1X_3 + X_1 - X_3 = 0.$$

(i) Classificare Σ e dedurre la sua forma canonica affine in opportune coordinate (z_1, z_2, z_3) di \mathbb{R}^3 .

(ii) Sia dato il piano α di equazione cartesiana $X_1 - X_3 = 0$ e sia $\mathcal{C} := \Sigma \cap \alpha$ la conica intersezione. Riconoscere la tipologia della conica \mathcal{C} giustificando inoltre il motivo per cui \mathcal{C} possa essere contenuta in Σ .

Svolgimento: (i) La matrice completa della quadrica Σ e' la matrice

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 8 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il determinante di \tilde{A} con il metodo di Laplace rispetto ad esempio alla prima riga, otteniamo

$$\det(\tilde{A}) = 1 > 0.$$

Pertanto, Σ e' una quadrica generale ed il segno del determinante della matrice simmetrica completa (che e' un invariante metrico ed affine di Σ) e' positivo.

Per quanto riguarda la matrice simmetrica A associata alla forma quadratica di Σ , essa ha manifestamente rango 2.

Dalla tabella della classificazione, deduciamo che Σ e' necessariamente un paraboloido iperbolico (o a sella). La sua forma canonica affine, in opportune coordinate, e' pertanto

$$Z_1^2 - Z_2^2 = Z_3.$$

(ii) Se intersechiamo Σ con il piano α otteniamo il sistema

$$5X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 = X_1 - X_3 = 0.$$

Ponendo $t = X_2/X_1$, l'equazione

$$5X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 = 0$$

diventa

$$t^2 + 6t + 5 = 0$$

che si fattorizza in

$$(t + 1)(t + 5) = 0.$$

Pertanto, il precedente sistema si fattorizza in:

$$r : X_1 + X_2 = X_1 - X_3 = 0$$

e

$$s : X_2 + 5X_1 = X_1 - X_3 = 0.$$

In definitiva, la conica sezione \mathcal{C} e' una conica semplicemente degenera costituita dalle due rette r e s incidenti nell'origine e contenute in Σ . In effetti dal punto (i), Σ e' doppiamente rigata, quindi r appartiene alla prima schiera di Σ e s appartiene alla seconda schiera di Σ . Inoltre, il fatto che la conica \mathcal{C} si spezzi in queste due rette discende direttamente dal fatto che α e' manifestamente il piano tangente a Σ nell'origine. Questo si dimostra o calcolando esplicitamente le derivate parziali del polinomio che definisce Σ , valutate in O , oppure basta osservare che l'equazione di Σ ha la parte lineare che e' $X_1 - X_3$; pertanto, poiche' lo sviluppo con il polinomio di Taylor attorno ad O fornisce un polinomio che coincide con l'equazione di Σ , questo comporta che l'annullamento dei termini lineari dell'equazione di Σ , i.e. $X_1 - X_3 = 0$, coincide con la varieta' lineare che "meglio" approssima la quadrica Σ in O , i.e. con il suo piano tangente.