Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)
CONICHE DI $\mathbb{R}^2$.
Docente: Prof. F. Flamini

<u>Esercizi Riepilogativi Svolti</u>

Esercizio 1: Classificare dal punto di vista metrico la conica $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana, $X_1^2 + X_2^2 - 4X_1 - 6X_2 = 3$, individuando la sua forma canonica metrica.
Svolgimento: Non è necessario applicare l'algoritmo di riduzione a forma canonica metrica delle coniche. Nei casi in cui i polinomi non sono troppo complicati, con opportuni artifici si può determinare semplicemente la classificazione metrica delle coniche. Oppure, si possono studiare i ranghi ed i determinanti delle varie matrici simmetriche associate. Nel caso in esame, è facile accorgersi che l'equazione data si può scrivere in forma

$$(X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2 = 16$$

che è quindi una circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e raggio 4. Considerando il cambiamento di coordinate

$$Y_1 := X_1 - 2, \quad Y_2 = X_2 - 3$$

dato da una traslazione, l'equazione della conica diventa

$$Y_1^2 + Y_2^2 = 16$$

e quindi

$$\frac{Y_1^2}{16} + \frac{Y_2^2}{16} = 1.$$

Pertanto, la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ è quella di un'ellisse generale a punti reali, i.e. di tipo (1), con $a = b = 4$, come dev'essere dato che abbiamo già detto essere una circonferenza.

Esercizio 2: Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $7X_1^2 - 10\sqrt{3}X_1X_2 - 3X_2^2 + 12\sqrt{3}X_1 - 12X_2 - 12 = 0$.

(i) Ridurre la conica $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica $\mathcal{M}$. Stabilire quindi la classificazione metrica di $\mathcal{C}$ e determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$.
(ii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti di $\mathcal{C}$.
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica associata alla forma quadratica della conica $\mathcal{C}$ è la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché $det\ A = -96 < 0$, allora sicuramente $\mathcal{C}$ sarà un'iperbole. Denotata con T un'indeterminata, il polinomio caratteristico di A è

$$det\ (A - TI) = T^2 - 4T - 96$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 12 \quad \lambda_2 = -8.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base $M = M_{e\ f}$ è quindi

$$M := \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente una matrice ortogonale, essendo e ed f ambedue basi ortonormali. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{3}/2y_1 + 1/2y_2, \quad x_2 = -1/2y_1 + \sqrt{3}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$12Y_1^2 - 8Y_2^2 + 24Y_1 - 12 = 0,$$

dato che $\overline{f}_1$ era l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 12$, mentre $\overline{f}_2$ è quello relativo a $\lambda_2 = -8$. Dividendo tutta l'equazione per 4, studiamo quindi la conica

$$\mathcal{C}' : 3Y_1^2 - 2Y_2^2 + 6Y_1 - 3 = 0.$$

Poiché il coefficiente di Y_2 è nullo, consideriamo la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $\overline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, con α da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di $\mathcal{C}'$ si ottiene

$$3Z_1^2 - 2Z_2^2 + 6(1+\alpha)Z_1 + 3\alpha^2 + 6\alpha - 3 = 0.$$

Scegliendo $\alpha = -1$ allora l'equazione della conica diventa

$$3Z_1^2 - 2Z_2^2 = 6$$

e quindi $\overline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dividendo tutto per 6, si ottiene che $\mathcal{C}$ è un'iperbole generale a punti reali e che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) è

$$\mathcal{M} : \quad Z_1^2/2 - Z_2^2/3 = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$ è data da

$$\overline{x} = M(\overline{z} + \overline{c}) = M\overline{z} + M\overline{c}.$$

Visto che $M\overline{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, le formule dell'isometria sono

$$x_1 = \sqrt{3}/2z_1 + 1/2z_2 - \sqrt{3}/2, \quad x_2 = -1/2z_1 + \sqrt{3}/2z_2 + 1/2.$$

(ii) Gli asintoti della forma canonica $\mathcal{M}$ sono le rette di equazioni cartesiane

$$\sqrt{3}Z_1 - \sqrt{2}Z_2 = 0, \quad \sqrt{3}Z_1 + \sqrt{2}Z_2 = 0$$

il centro di simmetria è l'origine di questo riferimento, l'asse di simmetria intersecato da $\mathcal{M}$ è $Z_2 = 0$ mentre l'asse di simmetria non intersecato da $\mathcal{M}$ è $Z_1 = 0$.

Dalle formule $\overline{x} = M\overline{z} + M\overline{c}$, troviamo che il centro di simmetria di $\mathcal{C}$ è quindi $\overline{x} = M\overline{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, che si ottiene per il valore di $\overline{z} = \overline{0}$. Sempre dalla relazione precedente e ricordando che M è una matrice ortogonale, si ottiene la relazione inversa

$$\overline{z} = {}^{t}M\overline{x} - \overline{c}$$

cioè

$$z_1 = \sqrt{3}/2x_1 - 1/2x_2 + 1, \quad z_2 = 1/2x_1 + \sqrt{3}/2x_2.$$

Pertanto, i due asintoti di $\mathcal{C}$ sono, rispettivamente,

$$(3-\sqrt{2})X_1 - (\sqrt{3}+\sqrt{6})X_2 + 2\sqrt{3} = 0, \quad (3+\sqrt{2})X_1 + (\sqrt{6}-\sqrt{3})X_2 + 2\sqrt{3} = 0.$$

Analogamente, l'asse di simmetria che non viene intersecato da $\mathcal{C}$ è

$$\sqrt{3}X_1 - X_2 + 2 = 0,$$

mentre quello che viene intersecato da C è

$$X_1 + \sqrt{3}X_2 = 0.$$

In questo modo, grazie alle proprietà geometriche note di $\mathcal{M}$ ed alla isometria che scaturisce dall'algoritmo di riduzione a forma canonica metrica, conosciamo tutti i dati geometrici necessari per poter disegnare senza problemi la conica $\mathcal{C}$ nel riferimento originario (x_1, x_2).

Esercizio 3: È data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2 + 6X_1 - 12X_2 + 9 = 0$. Ridurre la conica $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica $\mathcal{M}$. Stabilire la classificazione metrica di $\mathcal{C}$ e determinare esplicitamente l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$.
Svolgimento: La matrice simmetrica associata alla forma quadratica della conica C è la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiché $det\ A = 0$, allora sicuramente $\mathcal{C}$ apparterrà alla famiglia delle parabole. Il polinomio caratteristico di A è

$$det\ (A - TI) = T(T-5),$$

dove T un'indeterminata. Gli autovalori di A forniscono quindi, grazie al Teorema Spettrale, la seguente trasformazione di coordinate

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$\mathcal{C}' : \ \ 5Y_2^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}Y_2 + 9 = 0.$$

Poiché il coefficiente di Y_1 è nullo, consideriamo la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, con β da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di $\mathcal{C}'$ si ottiene che con $\beta = 3/\sqrt{5}$ l'equazione della conica diventa

$$5Z_2^2 = 0.$$

Dividendo tutto per 5, si ottiene che in tale riferimento $\mathcal{C}$ ha equazione cartesiana della sua forma

$$Z_2^2 = 0.$$

Deduciamo allora che $\mathcal{C}$ è una parabola doppiamente degenere. Però questa equazione non è la forma canonica metrica, come nella tipologia (9) della tabella fondamentale per la classificazione metrica delle coniche. Per averla basterà considerare uno scambio di coordinate (che è determinata da un'isometria lineare di $\mathbb{R}^2$). In altre parole, poniamo $\overline{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{W} = B\overline{W}$, che determina quindi

$$Z_1 = W_2, \qquad Z_2 = W_1.$$

In tali coordinate, otteniamo quindi che l'equazione della forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ è esattamente $W_1^2 = 0$.

Componendo tutte le trasformazioni di coordinate utilizzate:

$$\overline{x} = M\overline{y}, \ \ \overline{y} = \overline{z} + \overline{c}, \ \ \overline{z} = B\overline{w},$$

otteniamo che l'isometria che porta $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica $\mathcal{M}$ è

$$x_1 = -1/\sqrt{5}w_1 + 2/\sqrt{5}w_2 - 3/5, \quad x_2 = +2/\sqrt{5}w_1 + 1/\sqrt{5}w_2 + 6/5;$$

in particolare, utilizzando l'isometria inversa troviamo che $\mathcal{C}$ è la retta

$$X_1 - 2X_2 - 3 = 0$$

contata due volte.

Esercizio 4: Classificare dal punto di vista affine la conica $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana $X_1^2 - X_2^2 - 4X_1 - 6X_2 - 23 = 0$, determinando esplicitamente la sua forma canonica affine.

Svolgimento: Non è necessario applicare la riduzione a forma canonica affine delle coniche. Come osservato precedentemente, nei casi in cui i polinomi non sono troppo complicati, con opportuni artifici si può determinare semplicemente la classificazione affine delle coniche. Oppure, si possono studiare i ranghi ed i determinanti delle varie matrici simmetriche associate. Nell'esercizio in esame, scrivendo l'equazione data come

$$(X_1 - 2)^2 - (X_2 + 3)^2 = 18$$

la conica risulta essere un'iperbole generale di centro di simmetria $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ed asintoti paralleli alle bisettrici dei quadranti, i.e. $X_1 = X_2$ e $X_1 = -X_2$.

La stessa classificazione la potevamo ottenere considerando che la matrice simmetrica completa $\widetilde{A}$ della conica è di rango massimo e la matrice simmetrica A della forma quadratica della conica è di determinante -1. Quindi anche con questo tipo di analisi troviamo che la conica deve essere necessariamente un'iperbole generale. Pertanto, in opportune coordinate, la sua forma canonica affine è

$$Y_1^2 - Y_2^2 = 1.$$

Esercizio 5: Classificare dal punto di vista affine la conica $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana $X_1^2 + 2X_2^2 = 0$, determinando esplicitamente il cambiamento di coordinate che la porta nella sua forma canonica affine.

Svolgimento: Anche in questo caso, possiamo evitare di applicare l'algoritmo di riduzione a forma canonica affine. Infatti, poiché la somma eguagliata a zero è una somma di due quadrati, essa è pertanto una conica puntiforme, cioè supportata solo nell'origine. Considerando le sostituzioni

$$Y_1 = X_1 \quad \text{e} \quad Y_2 = \sqrt{2}\, X_2,$$

dettate dall'affinità di equazioni

$$\overline{Y} = A\overline{X}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

si ha la forma canonica affine di $\mathcal{C}$ che è, ovviamente,

$$Y_1^2 + Y_2^2 = 0.$$

Esercizio 6 Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 - 4X_1 - 3 = 0$.
(i) Classificare $\mathcal{C}$.
(ii) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica $\mathcal{M}$, trovando esplicitamente l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$.
(iii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti della conica $\mathcal{C}$.
(iv) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica affine $\mathcal{A}$, trovando esplicitamente l'affinità che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$.
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha determinante diverso da zero. Pertanto $\mathcal{C}$ è una conica generale. La matrice simmetrica della forma quadratica associata alla conica è la sottomatrice $\widetilde{A}(2,3;2,3)$ che è di determinante $3/4$. Pertanto $\mathcal{C}$ è sicuramente un'ellisse.
Dall'equazione di $\mathcal{C}$, notiamo che il suo supporto contiene il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pertanto, dalla classificazione delle ellissi generali, necessariamente deve contenere infiniti punti reali, i.e. è un'ellisse generale a punti reali.
(ii) Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica associata alla forma quadratica di $\mathcal{C}$ è

$$det(\widetilde{A}(2,3;2,3) - TI) = T^2 - 2T + \frac{3}{4}$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 1/2 \qquad \lambda_2 = 3/2.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $\widetilde{A}(2,3;2,3)$ è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente ortogonale. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano la forma quadratica $\mathcal{Q}(X_1, X_2)$ associata all'equazione di $\mathcal{C}$, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$Y_1^2 + 3Y_2^2 - 2\sqrt{2}Y_1 + 2\sqrt{2}Y_2 - 6 = 0.$$

Consideriamo ora la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $\overline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con α e β da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di $\mathcal{C}'$ si ottiene

$$Z_1^2 + 3Z_2^2 + 2(\alpha - \sqrt{2})Z_1 + 2(3\beta + \sqrt{2})Z_2 + \alpha^2 + 3\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2\sqrt{2}\beta - 6 = 0.$$

Scegliendo $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = -\sqrt{2}/3$, si ottiene

$$Z_1^2 + 3Z_2^2 = 10,$$

e quindi $\overline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$. Dividendo tutto per 10, ritroviamo che $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale a punti reali dato che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) è

$$\mathcal{M}: \quad \frac{Z_1^2}{10} + \frac{Z_2^2}{10/3} = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$ è data da

$$\overline{x} = M(\overline{z} + \overline{c}) = M\overline{z} + M\overline{c}.$$

Visto che $M\overline{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, le formule per questa isometria sono

$$x_1 = \sqrt{2}/2 z_1 - \sqrt{2}/2 z_2 + 4/3, \quad x_2 = \sqrt{2}/2 z_1 + \sqrt{2}/2 z_2 + 2/3.$$

(iii) $\mathcal{M}$ ha centro di simmetria l'origine di questo riferimento, e gli asse di simmetria gli assi coordinati. Nelle coordinate del riferimento iniziale, il centro di simmetria di $\mathcal{C}$ si ottiene per $\overline{z} = \overline{0}$, pertanto tale centro è $M\overline{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. L'isometria inversa è $\overline{z} = {}^t M\overline{x} - \overline{c}$, i.e.

$$z_1 = \sqrt{2}/2 x_1 + \sqrt{2}/2 x_2 - \sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{2}/2 x_1 + \sqrt{2}/2 x_2 + \sqrt{2}/3.$$

Pertanto, l'asse di simmetria $Z_1 = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 + X_2 = 2$$

mentre l'asse di simmetria $Z_2 = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 - X_2 = 2/3.$$

Per eventualmente disegnare $\mathcal{C}$ con precisione, si potrebbero trovare le intersezioni con gli assi di simmetria: questi non sono altro che i punti ottenuti per trasformazione, mediante l'isometria $\overline{x} = M\overline{z} + M\overline{c}$, dei punti di intersezione di $\mathcal{M}$ con gli assi coordinati $Z_1 = 0$ e $Z_2 = 0$.

(iv) Per trovare la forma canonica affine di $\mathcal{C}$, consideriamo la forma canonica metrica $\mathcal{M}$ ed applichiamo il procedimento di Sylvester alla forma quadratica associata all'equazione di $\mathcal{M}$. Se prendiamo in base di Sylvester indeterminate W_1 e W_2, otteniamo la trasformazione

$$Z_1 = \sqrt{10}\, W_1, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{10}{3}}\, W_2.$$

Con tale trasformazione, la forma canonica metrica $\mathcal{M}$ si trasforma in

$$\mathcal{A}: \;\; W_1^2 + W_2^2 = 1,$$

come doveva essere data la classificazione di $\mathcal{C}$. Prendiamo

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10/3} \end{pmatrix}$$

la matrice di questo cambiamento di coordinate. Poiché $\overline{z} = S\overline{w}$, dall'equazione vettoriale dell'isometria precedentemente trovata abbiamo $\overline{x} = MA\overline{w} + M\overline{c}$.
Calcolando il prodotto tra matrici, otteniamo che

$$MA = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi le formule per l'affinità sono:

$$x_1 = \sqrt{5}w_1 - \sqrt{5}/3w_2 + 4/3, \quad x_2 = \sqrt{5}w_1 + \sqrt{5}/3w_2 + 2/3.$$

Esercizio 7. Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $\frac{1}{2}X_1^2 - X_1X_2 + \frac{1}{2}X_2^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 + 7 = 0$.
(i) Classificare $\mathcal{C}$.
(ii) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica $\mathcal{M}$. Determinare inoltre tutte le isometrie coinvolte in tale riduzione, stabilendo che tipo di isometrie sono.
(iii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria o dell'eventuale vertice.
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Poichè $det\ \widetilde{A} = -\frac{9}{4} \neq 0$ e $det\ (\widetilde{A}(2,3;2,3)) = 0$, la conica $\mathcal{C}$ è sicuramente una parabola generale.
(ii) Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica associata alla forma quadratica di $\mathcal{C}$ è

$$det\ (\widetilde{A}(2,3;2,3) - TI) = T(T-1)$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 0 \ \text{ e } \ \lambda_2 = 1.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $\widetilde{A}(2,3;2,3)$ è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente ortogonale (non speciale). La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano la forma quadratica $\mathcal{Q}(X_1, X_2)$ associata all'equazione di $\mathcal{C}$, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$Y_2^2 - 3Y_1 - 4Y_2 + 7 = 0.$$

Consideriamo ora la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $\overline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con α e β da determinare opportunamente con le solite tecniche. Si determina

$$\alpha = -1, \quad \beta = -2,$$

e l'equazione di $\mathcal{C}'$ diventa, nel riferimento (z_1, z_2):

$$\mathcal{C}'' : \quad Z_2^2 = 3Z_1.$$

Facendo ora la sostituzione di indeterminate

$$Z_1 = W_2, \ \ Z_2 = W_1,$$

dettata dall'isometria lineare

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{w},$$

si ottiene

$$\mathcal{C}''' : \quad W_1^2 = 3W_2,$$

e quindi la forma canonica metrica richiesta è

$$\mathcal{M} : \quad \frac{1}{3}\, W_1^2 = W_2.$$

La prima isometria considerata è l'isometria

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

che è un'isometria lineare inversa. Precisamente è una riflessione le cui formule sono state descritte precedentemente, i.e.

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2.$$

La seconda isometria è ovviamente una traslazione, data da

$$y_1 = z_1 - 1, \quad y_2 = z_2 - 2.$$

La terza isometria

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{w}$$

è anch'essa un'isometria lineare inversa data dalla riflessione rispetto alla retta vettoriale $Z_1 = Z_2$.

(iii) La forma canonica metrica $\mathcal{M}$ ha vertice nell'origine del riferimento (z_1, z_2) ed asse di simmetria l'asse $Z_1 = 0$. Pertanto, nelle coordinate del riferimento iniziale, il vertice di $\mathcal{C}$ è

$$V = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mentre l'asse di simmetria $Z_1 = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 - X_2 = 2\sqrt{2}.$$

Esercizio 8. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2)$, si considerino le due coniche $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$\mathcal{C}: \; X_1^2 - X_2^2 = 0$$

e

$$\mathcal{D}: \; X_1 X_2 + X_2^2 = 0.$$

(i) Classificare dal punto di vista affine le coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.
(ii) Stabilire se le coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ possono essere affinemente equivalenti.
(iii) Stabilire se le coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ possono essere congruenti (i.e. isometriche).
Svolgimento: (i) Manifestamente ambedue le coniche sono due iperboli semplicemente degeneri, dato che entrambi si fattorizzano in prodotto di due polinomi lineari $\mathcal{C} : (X_1 - X_2)(X_1 + X_2) = 0$ e $\mathcal{D} : X_2(X_1 + X_2) = 0$.
(ii) Poiche' appartengono alla stessa tipologia, le coniche sono affinemente equivalenti dato che la forma canonica affine di un'iperbole semplicemente degenere e' univocamente determinata ed, in opportune coordinate, e' $Z_1^2 - Z_2^2 = 0$.
(iii) Le coniche non sono congruenti fra loro. Per arrivare a questa conclusione, invece di andare a determinare le forme canoniche metriche delle due coniche, e' sufficiente osservare che la conica $\mathcal{C}$ e' costituita dalla coppia di bisettrici del riferimento cartesiano, mentre la seconda conica e' costituita dall'unione della bisettrice $X_1 = -X_2$ e dall'asse X_1. Pertanto le rette che compongono la conica $\mathcal{C}$ formano un angolo convesso di $\frac{\pi}{2}$ mentre le rette che compongono la conica $\mathcal{D}$ formano un angolo convesso di $\frac{\pi}{4}$. Poiche' l'angolo tra due rette e' una proprieta' metrica, cioe' e' una proprieta' che si conserva sotto l'azione delle isometrie, allora $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ non possono essere congruenti.

Esercizio 9. Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 - 4X_1 - 3 = 0$.
(i) Classificare $\mathcal{C}$. (ii) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica $\mathcal{M}$, trovando esplicitamente l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$.

(iii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti della conica $\mathcal{C}$. (iv) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica affine $\mathcal{A}$, trovando esplicitamente l'affinità che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$.

Svolgimento: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{ccc} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{array} \right),$$

che ha determinante diverso da zero. Pertanto $\mathcal{C}$ è una conica generale. La matrice simmetrica della forma quadratica associata alla conica è la sottomatrice $\widetilde{A}(2,3;2,3)$ che è di determinante $3/4$. Pertanto $\mathcal{C}$ è sicuramente un'ellisse.

Dall'equazione di $\mathcal{C}$, notiamo che il suo supporto contiene il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pertanto, dalla classificazione delle ellissi generali, necessariamente deve contenere infiniti punti reali, i.e. è un'ellisse generale a punti reali.

(ii) Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica associata alla forma quadratica di $\mathcal{C}$ è

$$det(\widetilde{A}(2,3;2,3) - TI) = T^2 - 2T + \frac{3}{4}$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 1/2 \quad \lambda_2 = 3/2.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $\widetilde{A}(2,3;2,3)$ è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base è quindi

$$M = \left(\begin{array}{cc} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array} \right).$$

che è ovviamente ortogonale. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano la forma quadratica $\mathcal{Q}(X_1, X_2)$ associata all'equazione di $\mathcal{C}$, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$Y_1^2 + 3Y_2^2 - 2\sqrt{2}Y_1 + 2\sqrt{2}Y_2 - 6 = 0.$$

Consideriamo ora la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $\overline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con α e β da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di $\mathcal{C}'$ si ottiene

$$Z_1^2 + 3Z_2^2 + 2(\alpha - \sqrt{2})Z_1 + 2(3\beta + \sqrt{2})Z_2 + \alpha^2 + 3\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2\sqrt{2}\beta - 6 = 0.$$

Scegliendo $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = -\sqrt{2}/3$, si ottiene

$$Z_1^2 + 3Z_2^2 = 10,$$

e quindi $\overline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$. Dividendo tutto per 10, ritroviamo che $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale a punti reali dato che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) è

$$\mathcal{M}: \quad \frac{Z_1^2}{10} + \frac{Z_2^2}{10/3} = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$ è data da

$$\overline{x} = M(\overline{z} + \overline{c}) = M\overline{z} + M\overline{c}.$$

Visto che $M\overline{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, le formule per questa isometria sono

$$x_1 = \sqrt{2}/2z_1 - \sqrt{2}/2z_2 + 4/3, \quad x_2 = \sqrt{2}/2z_1 + \sqrt{2}/2z_2 + 2/3.$$

(iii) $\mathcal{M}$ ha centro di simmetria l'origine di questo riferimento, e gli asse di simmetria gli assi coordinati. Nelle coordinate del riferimento iniziale, il centro di simmetria di $\mathcal{C}$ si ottiene per $\overline{z} = \overline{0}$, pertanto tale centro è $M\overline{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. L'isometria inversa è $\overline{z} = {}^tM\overline{x} - \overline{c}$, i.e.

$$z_1 = \sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2 - \sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{2}/2x_1 + \sqrt{2}/2x_2 + \sqrt{2}/3.$$

Pertanto, l'asse di simmetria $Z_1 = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 + X_2 = 2$$

mentre l'asse di simmetria $Z_2 = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 - X_2 = 2/3.$$

Per eventualmente disegnare $\mathcal{C}$ con precisione, si potrebbero trovare le intersezioni con gli assi di simmetria: questi non sono altro che i punti ottenuti per trasformazione, mediante l'isometria $\overline{x} = M\overline{z} + M\overline{c}$, dei punti di intersezione di $\mathcal{M}$ con gli assi coordinati $Z_1 = 0$ e $Z_2 = 0$.
(iv) Per trovare la forma canonica affine di $\mathcal{C}$, consideriamo la forma canonica metrica $\mathcal{M}$ ed applichiamo il procedimento di Sylvester alla forma quadratica associata all'equazione di $\mathcal{M}$. Se prendiamo in base di Sylvester indeterminate W_1 e W_2, otteniamo la trasformazione

$$Z_1 = \sqrt{10}\, W_1, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{10}{3}}\, W_2.$$

Con tale trasformazione, la forma canonica metrica $\mathcal{M}$ si trasforma in

$$\mathcal{A}: \;\; W_1^2 + W_2^2 = 1,$$

come doveva essere data la classificazione di $\mathcal{C}$. Prendiamo

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10/3} \end{pmatrix}$$

la matrice di questo cambiamento di coordinate. Poiché $\overline{z} = S\overline{w}$, dall'equazione vettoriale dell'isometria precedentemente trovata abbiamo $\overline{x} = MA\overline{w} + M\overline{c}$.
Calcolando il prodotto tra matrici, otteniamo che

$$MA = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi le formule per l'affinità sono:

$$x_1 = \sqrt{5}w_1 - \sqrt{5}/3w_2 + 4/3, \quad x_2 = \sqrt{5}w_1 + \sqrt{5}/3w_2 + 2/3.$$

Esercizio 10. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2)$, siano date la coniche

$$\mathcal{C} : X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 - 4X_1 - 4X_2 - 3 = 0$$

e

$$\mathcal{C} : X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2 - X_1 + X_2 = 0$$

(i) Classificare $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$.
(ii) Stabilire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ possono essere affinemente equivalenti.
(iii) Stabilire se $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ possono essere congruenti.
Svolgimento: (i) Con l'usuale analisi delle matici simmetriche associate alle due coniche, si determina che sono ambedue parabole semplicemente degeneri a punti reali.
(ii) Dalla classificazione affine, le due coniche sono sicuramente affinemente equivalenti, dato che la forma canonica affine di entrambi e' la stessa.
(iii) Affermiamo che le due coniche non sono congruenti. Un modo standard per dimostrare l'affermazione e' applicare l'algoritmo di riduzione a forma canonica metrica delle due coniche e verificare che le due forme canoniche metriche sono differenti. Un modo piu' rapido e piu' geometrico e' invece il seguente.

Poiche' sia $\mathcal{C}$ che $\mathcal{D}$ sono costituite, ciascuna, da due rette parallele, possiamo trovare le direzioni di tali rette calcolando i punti impropri delle coniche. Per $\mathcal{C}$ abbiamo il sistema omogeneo

$$X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 = 0 = X_0$$

che fornisce il punto $[0, 1, -1]$ con molteplicita' 2. Analogamente, il punto improprio di $\mathcal{D}$ e' dato dal sistema omogeneo

$$X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2 = 0 = X_0$$

che fornisce il punto $[0, 1, 1]$ con molteplicita' 2.

Pertanto $\mathcal{C}$ e' costituita da due rette parallele alla bisettrice $X_1 + X_2 = 0$ mentre $\mathcal{D}$ da due rette parallele alla bisettrice $X_1 - X_2 = 0$. Intersecando $\mathcal{C}$ con la perpendicolare per l'origine si trovano due punti di intersezione dal sistema

$$4X_1^2 - 8X_1 - 3 = 0 = X_1 - X_2.$$

Analogamente, intersecando $\mathcal{D}$ con la perpendicolare per l'origine si trovano due punti di intersezione dal sistema

$$4X_1^2 - 2X_1 = 0 = X_1 + X_2.$$

La formula della distanza fra due punti verifica che le due parabole degeneri non possono essere congruenti.