Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)
ISOMETRIE ED AFFINITA' NOTEVOLI DI $\mathbb{R}^3$.
TEOREMA SPETTRALE DEGLI OPERATORI AUTOAGGIUNTI. FORME QUADRATICHE.
Docente: Prof. F. Flamini

<u>Esercizi Riepilogativi Svolti</u>

Esercizio 1: Sia $\overline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore e sia $r_0 := Lin\{\overline{v}\}$ la corrispondente retta vettoriale orientata.
(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2,r_0}$ di angolo $\pi/2$ attorno alla retta vettoriale orientata r_0;
(ii) Sia ℓ la retta di equazioni parametriche

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calcolare le equazioni parametriche della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2,\overline{v}}$ a ℓ.
Svolgimento: (i) Una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ avente $\overline{v}$ come primo vettore della base e', ad esempio

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per renderla ortonormale, basta dividere ogni vettore per la sua norma (le coordinate le scriviamo per comodita' per riga):

$$\overline{e}'_1 = \frac{\overline{f}_1}{||\overline{f}_1||} = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), \ \overline{e}'_2 = \frac{\overline{f}_2}{||\overline{f}_2||} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),$$

e

$$\overline{e}'_3 = \frac{\overline{f}_3}{||\overline{f}_3||} = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}).$$

La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno ad $\overline{e}'_1$, espressa in tale nuova base ortonormale, ha matrice rappresentativa standard:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base dalla base canonica alla base $\{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$ e' la matrice M che ha per colonne le coordinate dei vettori di tale nuova base espressi in base canonica. Quindi, la matrice rappresentativa di $R_{\pi/2,\overline{v}}$, espressa rispetto alla base canonica, e' la matrice A data da

$$A = MA'M^{-1} = MA'M^t,$$

dato che M e' una matrice ortogonale. Percio'

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Le equazioni parametriche cercate si ottengono, ad esempio, applicando la matrice A al punto generico della retta ℓ, che e' $(1+2t, -1+t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$ (scritto per riga per brevita'). Si ottiene quindi

$$\overline{x} = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3) + t(4/3, (4-\sqrt{3})/3, (4+\sqrt{3})/3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un modo equivalente per trovare le equazioni parametriche della nuova retta era anche il seguente: si prendono 2 punti qualsiasi P e Q di l, si considerano i trasformati di tali due punti mediante $R_{\pi/2,r_0}$, i.e. $A(P)$ e $A(Q)$, e infine si determina l'equazione parametrica della retta passante per i due punti $A(P)$ e $A(Q)$.

Esercizio 2: Sia $\overline{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore e sia $r_0 := Lin\{\overline{v}\}$ la corrispondente retta vettoriale orientata.

(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4,r_0}$ di un angolo $-\pi/4$ attorno ala retta orientata r_0;

(ii) Sia Π il piano di equazione cartesiana

$$X_1 + X_2 = 7.$$

Calcolare le equazioni parametriche del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4, r_0}$ a Π.
Svolgimento: (i) Nella base $\{\overline{e}_1', \overline{e}_2', \overline{e}_3'\}$ determinata nell'esercizio precedente, la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno ad $\overline{e}_1'$ ha, rispetto a tale base ortonormale, matrice rappresentativa

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Percio', rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa e'

$$B = MB'M^t = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Basta prendere tre punti distinti e non allineati, $P, Q, T \in \Pi$, determinare i tre punti trasformati $P' = B(P)$, $Q' = B(Q)$ e $T' = B(T)$, e poi calcolare le equazioni parametriche del piano Π' per questi nuovi tre punti.

Esercizio 3: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ sia l la retta di equazioni parametriche

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Scrivere le formule di rotazione $R_{\frac{\pi}{2}, \overline{v}}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno alla retta vettoriale orientata generata dal vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(ii) Calcolare le equazioni parametriche della retta $m = R_{\frac{\pi}{2}, \overline{v}}(l)$.
Svolgimento: (i) Sia $b = \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ positivamente orientata e con $\overline{f}_1 = \overline{v}/||\overline{v}||$. Percio'

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

In base b, la matrice di rotazione $R_{\pi/2}$ e':

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Percio', se M e' la matrice cambiamento di base dalla base canonica e alla base b, allora M e' una matrice ortogonale e la matrice della rotazione $R_{\pi/2,\overline{v}}$ in base e e':

$$A = M\tilde{A}M^t = \begin{pmatrix} 1/3 & (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 \\ 1/3 & 1/3 & -\sqrt{3}/3 \\ (1-\sqrt{3})/3 & (1+\sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(ii) La retta m ha equazioni parametriche

$$A \begin{pmatrix} 1+t \\ 3t \\ 1+t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4: Sia K il cubo in $\mathbb{R}^3$ di vertici:

$$(1,1,1), \quad (1,-1,1), \quad (-1,1,1), \quad (-1,-1,1),$$

$$(1,1,-1), \quad (1,-1,-1), \quad (-1,1,-1), \quad (-1,-1,-1).$$

(i) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2,\overline{e}_3}$;;

(ii) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2,\overline{e}_1}$;

(iii) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2,-\overline{e}_1}$;

(iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

Svolgimento: (i) La rotazione $R_{\pi/2,\overline{e}_3}$; e':

$$R_{\pi/2,\overline{e}_3}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, x_3),$$

percio' K viene mandato in se stesso.

(ii) Stessa conclusione come nel punto (i);

(iii) La rotazione $R_{\pi/2,-\overline{e}_1}$; e' esattamente come la rotazione $R_{-\pi/2,\overline{e}_1}$. Analoga conclusione come in (i) ed in (ii).

(iv) Se K viene mandato in se stesso, allora l'asse della rotazione e' uno dei seguenti:

(a) retta congiungente i centri di due facce opposte;

(b) retta congiungente i punti medi di due spigoli opposti;

(c) retta congiungente 2 vertici opposti.

Le rotazioni di tipo (a) sono di angoli $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Le rotazioni di tipo (b) devono mandare devono mandare gli spigoli che questo asse interseca in se stessi, percio' sono rotazioni di angolo $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Infine, le rotazioni di tipo (c) devono mandare i 3 lati uscenti da uno dei 2 vertici in loro stessi, cioe' i tre spigoli devono essere permutati fra loro. Percio' e' una rotazione di angolo $\frac{2k\pi}{3}$.

Esercizio 5: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ sia π il piano di equazione cartesiana

$$X_1 + X_2 = 1$$

e sia r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 & = & 0 \\ X_2 + X_3 & = & 1 \end{cases} .$$

Riflettere la retta r rispetto al piano π, calcolando esplicitamente le equazioni parametriche della retta $S_\pi(r)$ che e' la retta riflessa di r rispetto a π.
Svolgimento: Le coordinate di $P := \pi \cap r$ sono le soluzioni del sistema lineare di 3 equazioni e 3 incognite che si ottiene mettendo a sistema le equazioni cartesiane che definiscono π e r. Si ottiene $P = (-1/2, 3/2, -1/2)$. Un secondo punto sulla retta r e' ad esempio $Q = (-1, 1, 0)$.
La retta n che passa per Q e che e' ortogonale a π ha equazione parametrica:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Il punto di intersezione $n \cap \pi$ corrisponde al valore del parametro $t = 1/2$. Il riflesso Q' di Q rispetto a π corrisponde quindi a $t = 1$, ed abbiamo quindi $Q' = (0, 2, 0)$.
Poiche' la riflessione rispetto a π lascia fisso P, la retta cercata e' la retta che passa per P e per Q', che ha pertanto equazioni parametriche:

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 6 Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ e con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione cartesiana:

$$\pi : \quad 2X_1 - X_2 + X_3 = 4.$$

(i) Scrivere le formule di riflessione rispetto al piano π.
(ii) Determinare le equazioni cartesiane della retta $m \subset \mathbb{R}^3$, ottenuta per riflessione della retta l : $\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 & = & 0 \\ X_1 - X_2 - 1 & = & 0 \end{cases}$ rispetto al piano π.

Svolgimento: (i) Sia $p = (a, b, c)$ il punto generico di $\mathbb{R}^3$. Un vettore normale al piano π e' il vettore $\overline{n} = (2, -1, 1)$. Pertanto la retta r, passante per p e perpendicolare a π, ha equazione parametrica vettoriale

$$\overline{x} = \overline{p} + t\overline{n},$$

e quindi equazioni parametriche scalari

$$X_1 = a + 2t, \quad X_2 = b - t, \quad X_3 = c + t.$$

Se imponiamo l'intersezione di r con π, si ottiene il valore

$$t_0 = (4 + b - c - 2a)/6.$$

Quindi, se $S_\pi(p)$ denota il simmetrico di p rispetto a π, esso si ottiene come punto sulla retta r, corrispondente al valore del parametro $2t_0$, cioe'

$$S_\pi(p) = (a, b, c) + ((4 + b - c - 2a)/3) \ \ (2, -1, 1).$$

In definitiva, le formule di simmetria rispetto a π sono

$$S_\pi((a, b, c)) = (-a/3+2b/3-2c/3+8/3, \ 2a/3+2b/3+c/3-4/3, \ -2a/3+b/3+2c/3+4/3).$$

(ii) Prendiamo due punti su l, ad esempio $R = (1, 0, 1) \quad \mathrm{e} \quad Q = (0, -1, -1)$. Dalle formule di simmetria precedenti, si ha che

$$S_\pi(R) = (5/3, -1/3, 4/3) \quad S_\pi(Q) = (8/3, -7/3, 5/3).$$

Percio', un vettore direttore di m e' dato da

$$S_\pi(Q) - S_\pi(R) = (1, -2, -1).$$

Allora, l'equazione parametrica vettoriale di m e' data da $\overline{x} = (5/3, -1/3, 4/3) + t(1, -2, -1)$ e quindi le equazioni parametriche scalari sono

$$X_1 = 5/3 + t, \;\; X_2 = -1/3 - 2t, \;\; X_3 = 4/3 - t.$$

Queste determinano le equazioni cartesiane di m che sono, ad esempio

$$m : \quad X_1 + X_3 - 3 = 0 = X_2 - 2X_3 + 3 = 0.$$

Esercizio 7. Sia data la forma quadratica di ordine 2

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2.$$

(i) Determinare un'isometria che fornisca coordinate (y_1, y_2) su $\mathbb{R}^2$ rispetto alle quali la forma quadratica Q risulti diagonale.
(ii) Stabilire il rango e la segnatura di Q.
Svolgimento: La matrice simmetrica $A = A_Q$ associata a Q nelle coordinate (x_1, x_2) e' la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiche' $det(A) = 0$, allora sicuramente A non avra' rango massimo. In altre parole $rg(A) \leq 1$. Visto che l'unica matrice di rango 0 e' la matrice identicamente nulla, allora $rg(A) = 1$.
Pertanto, visto che la nozione di rango di una forma quadratica Q e' indipendente dalla scelta della base di $\mathbb{R}^2$, equivalentemente della matrice simmetrica che la rappresenta, possiamo gia' concludere che

$$rg(Q) = 1.$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$det(A - tI) = t(t - 5).$$

Gli autovalori di A sono

$$0 \;\text{ e }\; 5.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, tali autovalori forniscono la seguente base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A:

$$\mathbf{f}_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad \mathbf{f}_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Se consideriamo sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, munito di questa nuova base ortonormale f, coordinate (y_1, y_2) relative alla base f allora, dalle varie conseguenze del teorema Spettrale, si ha che in tali coordinate Q diventa

$$Q(Y_1, Y_2) = 0Y_1^2 + 5Y_2^2 = 5Y_2^2.$$

Poiche' nel testo dell'esercizio e' richiesto esplicitamente di trovare la trasformazione (isometria lineare) di coordinate di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizza Q, allora osserviamo che i versori della base f formano la matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice determina la trasformazione di coordinate

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioe'

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

In effetti, facendo queste sostituzioni nel polinomio iniziale

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2$$

e svolgendo tutti i conti, si ottiene effettivamente

$$Q(Y_1, Y_2) = 5Y_2^2,$$

che e' ulteriore verifica (superflua!) di quanto asserito precedentemente.
(ii) Avevamo gia' riscontrato che il rango di Q era 1. Visto che l'unico autovalore nonnullo di Q e' 5, che e' positivo, e visto che la nozione di segnatura di una forma quadratica e' indipendente dalla scelta della base, deduciamo che la segnatura di Q e' $(1, 0)$.

Esercizio 8. In $\mathbb{R}^3$ si consideri fissato il vettore

$$\mathbf{u}_0 = (1, 2, 1).$$

Sia T l'operatore lineare di $\mathbb{R}^3$, definito da

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0, \;\; \forall \;\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Stabilire se T e' un operatore autoaggiunto;

(ii) Scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica e; confrontare il risultato con quanto risposto in (i).

Svolgimento: (i) T non e' autoaggiunto. Infatti, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, ricordando le proprieta' del prodotto vettoriale, si ha che

$$\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0), \mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, (\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, (-\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}_0)\rangle = \langle \mathbf{x}, (-T(\mathbf{y}))\rangle.$$

Poiche' un operatore coincide con il suo opposto se e solo se e' l'operatore nullo, si ha pertanto $T \neq -T$ (dato che T e' manifestamente un operatore non-identicamente nullo). Percio' T non puo' essere autoaggiunto.

(ii) Per calcolare la matrice A di T rispetto alla base canonica, basta vedere le immagini $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$, dei tre vettori della base canonica. Per definizione di T, basta calcolare i tre prodotti vettoriali

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{u}_0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Si ha

$$T(\mathbf{e}_1) = (0, -1, 2), \quad T(\mathbf{e}_2) = (1, 0 - 1), \quad T(\mathbf{e}_3) = (-2, 1, 0).$$

Percio' la matrice A ha per i-esima colonna il vettore $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Manifestamente si vede che la matrice A non e' una matrice simmetrica. Poiche' la matrice A e' espressa utilizzando una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard che esiste su $\mathbb{R}^3$, allora possiamo anche in questo modo concludere che T non puo' essere un operatore autoaggiunto, come abbiamo dedotto in modo intrinseco al punto (i).

Esercizio 9. Sia T l'operatore autoaggiunto di $\mathbb{R}^4$ definito, rispetto alla base canonica e, dalla matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Scrivere l'equazione della forma quadratica Q associata a T.

(ii) Utilizzando il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A determinando la base ortonormale di autovettori di A in cui Q risulta essere una forma quadratica diagonale.

(iii) Determinare esplicitamente la segnatura di Q.

Svolgimento: (i) La matrice della forma quadratica Q coincide con A. Quindi Q ha equazione:

$$Q(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^2 - X_2^2 + 2X_3X_4.$$

(ii) Il polinomio caratteristico di A e'

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Quindi A ha due autovalori, i.e. 1 e -1, ambedue di molteplicita' algebrica 2. Denotati con V_1 e V_{-1} i rispettivi autospazi, troviamo che

$$V_1 = Span\{(1,0,0,0),\ (0,0,1,1)\}, \quad V_{-1} = Span\{(0,1,0,0),\ (0,0,1,-1)\}$$

poiche' le equazioni cartesiane per V_1 sono

$$X_2 = X_3 - X_4 = 0,$$

mentre quelle per V_{-1} sono

$$X_1 = X_3 + X_4 = 0.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, per diagonalizzare A basta considerare una base ortonormale di autovettori di A.
Sappiamo che i due autospazi V_1 e V_{-1} sono gia' fra di loro ortogonali, poiche' sono autospazi relativi ad autovalori distinti. Osserviamo inoltre che i generatori di V_1 (rispettivamente di V_{-1}) sono due vettori ortogonali. Percio' per determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A, basta normalizzare i 4 vettori trovati. Otteniamo che la base voluta e'

$$f := \{(1,0,0,0), \ \ (0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}), \ \ (0,1,0,0), \ \ (0,0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})\}.$$

Dalla teoria generale, in tale base, la matrice A diventa congruente alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cioe' alla matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, nell'ordine relativo alla scelta dell'ordinamento dei vettori della base f, ciascun autovalore ripetuto tante volte quanto e' la sua molteplicita' algebrica (equivalentemente geometrica). Questo significa che la forma quadratica Q in tale base ha, rispetto alle opportune coordinate, equazione

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 - Y_4^2.$$

(iii) La segnatura di Q e' ovviamente $(2, -2)$, come si deduceva gia' dal segno degli autovalori di A.

Esercizio 10. Stabilire rango, segnatura e forma diagonale della seguente forma quadratica

$$Q(X_1, X_2) = 3X_1^2 - 2X_1X_2 + 3X_2^2.$$

Svolgimento: Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice simmetrica associata a Q. Essa ha autovalori

$$2 \text{ e } 4.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, in opportune coordinate (y_1, y_2) di $\mathbb{R}^2$, l'equazione di Q diventa

$$2Y_1^2 + 4Y_2^2.$$

Pertanto Q ha rango 2 e segnatura $(2, 0)$.

Esercizio 11: Stabilire rango, segnatura e forma diagonale della seguente forma quadratica

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2.$$

Svolgimento: La matrice della parte omogenea di grado 2 della conica e'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

percio' Q ha rango 1. L'autovalore non nullo di A e' 2. Pertanto la segnatura di Q e' $(1, 0)$ ed, in opportune coordinate (y_1, y_2), la forma diagonale e' ad esempio

$$Q(Y_1, Y_2) = 2Y_1^2.$$