Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)
PRODOTTO VETTORIALE E PRODOTTO MISTO. PIANI E RETTE DI $\mathbb{R}^3$.
FASCI E STELLE. FORMULE DI GEOMETRIA IN $\mathbb{R}^3$. SFERE E CIRCONFERENZE.
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \overline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori dati;
(ii) calcolare l'orientazione della terna ordinata $\{\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}\}$.
Svolgimento: (i) Il volume del parallelepipedo richiesto si trova calcolando il valore assoluto del determinante della matrice quadrata di ordine 3 che ha per colonne le coordinate della terna di vettori. Tale volume risulta uguale ad 1.
(ii) Il valore del determinante della matrice associata alla terna ordinata $\{\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}\}$ e' - 1; segue che la terna ordinata e' una base non equiorientata (o equiversa) alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, sia dato il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$U: \ X_1 - X_2 = 0.$$

Determinare una base ortonormale b di $\mathbb{R}^3$, orientata positivamente ed i cui primi due versori appartengano al sottospazio U.
Svolgimento: Notiamo che U e' un piano vettoriale, cioe' e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Una base naturale per U e' data dai vettori:

$$\overline{v} = (1, 1, 0), \quad \overline{w} = (0, 0, 1)$$

(le cui coordinate sono scritte per riga per brevita'). Notiamo che

$$\langle \overline{v}, \overline{w} \rangle = 0$$

e che $\overline{w}$ e' gia' un versore. Percio' per determinare una base ortonormale di U, basta versorizzare $\overline{v}$ e si ottiene:

$$\overline{f}_1 := \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 := \overline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b. Per determinare il terzo vettore di b, basta considerare

$$\overline{f}_3 := \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = ||\overline{f}_3||^2 = 1.$$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, sia dato il sottospazio vettoriale U, di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 & = & 0 \\ X_2 + X_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Determinare una base ortonormale b' di $\mathbb{R}^3$, orientata positivamente ed il cui primo versore appartenga al sottospazio U.

Svolgimento: Notiamo che U e' una retta vettoriale. Un vettore direttore di U, i.e. una base di U, si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce U. Ad esempio, una soluzione e' data dal vettore

$$\overline{v} = (1, -1, 1).$$

Percio', versorizzando $\overline{v}$ si ottiene:

$$\overline{f}_1 := \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora scegliere opportunamente un vettore di $\mathbb{R}^3$ che sia manifestamente ortogonale ad U, ad esempio

$$\overline{w} = (1, 1, 0).$$

Percio', versorizzando $\overline{w}$ otteniamo:

$$\overline{f}_2 = \frac{\overline{w}}{||\overline{w}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b'. Per determinare il terzo vettore della base b', basta considerare

$$\overline{f}_3 := \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = ||\overline{f}_3||^2 = 1.$$

Esercizio 4. (i) Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale euclideo, munito della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Sia U il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$X_1 - X_3 = 0.$$

Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, positivamente orientata, i cui primi due versori appartengano ad U.

(ii) Si consideri ora $\mathbb{R}^3$ come spazio cartesiano, con riferimento cartesiano standard $(O; x_1, x_2, x_3)$. Determinare l'equazione cartesiana del piano π, passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, parallelo alla retta r, di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - 3X_3 = 1 \\ X_2 + X_3 = 3 \end{cases},$$

e perpendicolare al piano α di equazione cartesiana

$$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 = 1.$$

Scrivere infine l'equazione cartesiana di una qualsiasi retta che sia sghemba alla retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - X_3 & = & 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 & = & 1 \end{cases} .$$

Svolgimento: (i) Dall'equazione di U, abbiamo che una base di U e' ad esempio

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \ \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Tali due vettori sono gia' ortogonali. Pertanto, basta considerare

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} , \ \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Il terzo versore della base ortonormale positivamente orientata sara' dato da

$$\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} .$$

(ii) Il piano richiesto deve contenere nella sua giacitura un vettore direttore di r ed un vettore normale al piano α. Pertanto, detto $\underline{v}$ un vettore direttore di r e $\underline{n}$ un vettore normale a α, un vettore normale a π e' il vettore

$$\underline{n}' = \underline{v} \wedge \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di π e' della forma

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 + k = 0.$$

Il passaggio per P fornisce l'equazione

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 - 13 = 0.$$

Per determinare una qualsiasi retta sghemba a s, prendiamo un qualsiasi piano parallelo ad esempio a $X_1 - X_3 = 1$, sia questo ad esempio

$$X_1 - X_2 = 2.$$

In seguito, consideriamo un piano non parallelo a $X_1+X_2+X_3=1$ e che non contenga s, ad esempio $X_3 = 1$. Infatti, mettendo a sistema le equazioni cartesiane di s con $X_3 = 1$ troviamo un unico punto di intersezione, pertanto $X_3 = 1$ non contiene s. In definitiva, la retta data da

$$\begin{cases} X_1 - X_3 &= 2 \\ X_3 &= 1 \end{cases},$$

e' sicuramente sghemba a s, dato che essa non e' parallela a s ed e' contenuta in un piano parallelo ad uno dei due che determinano s.

Esercizio 5. Siano assegnati nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ la retta

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0, \end{cases} \quad \text{ed il piano } \ \Pi : x_1 + x_3 = 0.$$

Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche della retta r' che e' proiezione ortogonale di r sul piano Π.

Svolgimento: La retta r' sara' determinata dall'intersezione di Π con Γ, dove Γ e' il piano contenente la retta r e perpendicolare a Π, i.e. $r' = \Pi \cap \Gamma$. Sia Γ questo piano incognito da determinare, la cui equazione cartesiana sara' della forma

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Poiche' Γ deve contenere la retta r, che e' una retta passante per l'origine, allora anche Γ passa per l'origine. Quindi $d = 0$. Pertanto l'equazione si trasforma in

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Inoltre, Γ deve contenere tutti i punti di r, che sono della forma $P = (-2t, -2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Pertanto deve valere la relazione

$$-2at - 2bt + ct = 0, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

quindi

$$-2a - 2b + c = 0.$$

D'altra parte, Γ deve essere perpendicolare a Π. Quindi la giacitura di Γ (che coincide con Γ stesso, dato che e' un piano per l'origine) deve contenere un vettore normale a Π.

Un vettore normale a Π e' il vettore $\underline{n} = (1, 0, 1)$. Pertanto, vale anche la relazione

$$a + c = 0.$$

In definitiva, dal sistema lineare

$$-2a - 2b + c = a + c = 0$$

troviamo soluzioni

$$c = -a \text{ e } b = -\frac{3}{2}a.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

troviamo

$$ax_1 - \frac{3}{2}ax_2 - ax_3 = 0.$$

Poiche' l'equazione di un piano e' definita a meno di proporzionalita', il piano Γ ha equazione cartesiana:

$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

Percio', la retta r' ha equazioni cartesiane:

$$r' : \begin{cases} x_1 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = 0, \end{cases} .$$

Risolvendo ora il sistema lineare non omogeneo che fornisce le equazioni cartesiane per r', troviamo le equazioni parametriche di r', che sono: $(x_1, x_2, x_3) = (2t, -2t, 5t),\ t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 6. Sono assegnate la retta

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ x_3 & = 0, \end{cases} \quad \text{ed il piano } \ \Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

(i) Determinare il piano Λ contenente r ed ortogonale a Π;

(ii) Determinare la retta s, proiezione ortogonale di r su Π;

Svolgimento: (i) Si ragiona esattamente come nell'esercizio precedente. Il piano Π ha vettore normale $\underline{n} = (1, 2, -1)$. Percio' il piano Λ ha equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

(ii) La retta s e' l'intersezione di Π con Λ, percio':

$$s : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0, \end{cases} .$$

Esercizio 7. Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio cartesiano, con riferimento cartesiano standard $(O; x_1, x_2, x_3)$. Determinare l'equazione cartesiana del piano π, passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, parallelo alla retta r, di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - 3X_3 & = & 1 \\ X_2 + X_3 & = & 3 \end{cases} ,$$

e perpendicolare al piano α di equazione cartesiana

$$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 = 1.$$

Scrivere infine l'equazione cartesiana di una qualsiasi retta che sia sghemba alla retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - X_3 & = & 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 & = & 1 \end{cases} .$$

Svolgimento: Il piano richiesto deve contenere nella sua giacitura un vettore direttore di r ed un vettore normale al piano α. Pertanto, detto $\underline{v}$ un vettore direttore di r e $\underline{n}$ un vettore normale a α, un vettore normale a π e' il vettore

$$\underline{n}' = \underline{v} \wedge \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di π e' della forma

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 + k = 0.$$

Il passaggio per P fornisce l'equazione

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 - 13 = 0.$$

Per determinare una qualsiasi retta sghemba a s, prendiamo un qualsiasi piano parallelo ad esempio a $X_1 - X_3 = 1$, sia questo ad esempio

$$X_1 - X_2 = 2.$$

In seguito, consideriamo un piano non parallelo a $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ e che non contenga s, ad esempio $X_3 = 1$. Infatti, mettendo a sistema le equazioni cartesiane di s con $X_3 = 1$ troviamo un unico punto di intersezione, pertanto $X_3 = 1$ non contiene s. In definitiva, la retta data da

$$\begin{cases} X_1 - X_3 & = & 2 \\ X_3 & = & 1 \end{cases},$$

e' sicuramente sghemba a s, dato che essa non e' parallela a s ed e' contenuta in un piano parallelo ad uno dei due che determinano s.

Esercizio 8: Sono assegnate la retta

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ x_3 & = 0, \end{cases} \quad \text{ed il piano } \ \Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

(i) Determinare il piano Λ contenente r ed ortogonale a Π;
(ii) Determinare la retta s, proiezione ortogonale di r su Π;
(iii) Determinare l'angolo convesso $\theta(r, s)$ tra r ed s;
Svolgimento: (i) Si ragiona esattamente come nell'esercizio precedente. Il piano Π ha vettore normale $\underline{n} = (1, 2, -1)$. Percio' il piano Λ ha equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

(ii) La retta s e' l'intersezione di Π con Λ, percio':

$$s : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0, \end{cases} .$$

(iii) La retta r ha vettore direttore $\underline{r} = (1, 1, 0)$, la retta s ha vettore direttore $\underline{s} = (1, 0, 1)$. Percio',

$$cos(\theta(r, s)) = \pm \frac{\underline{r} \cdot \underline{s}}{||\underline{r}|| ||\underline{s}||} = \pm \frac{1}{2},$$

i.e. $\theta(r, s)$ e' o $\frac{\pi}{3}$ oppure $\frac{2}{3}\pi$, a seconda di come sono orientate le due rette.

Esercizio 9: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ sia data la retta r di equazioni cartesiane

$$r : x_1 - x_2 = x_3 - 1 = 0.$$

Determinare tutte le rette s, aventi vettore direttore

$$(1, 0, -1)$$

e tali che

$$d(r, s) = 1.$$

Stabilire inoltre se queste rette sono in numero finito oppure se sono infinite.
Svolgimento: Una retta s siffatta e' della forma

$$x_2 - b = x_1 + x_3 - a - c = 0,$$

dove (a, b, c) e' il generico punto dello spazio.
Imporre che una tale s sia a distanza 1 da r determina

$$a - b + c = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Sostituendo tale eguaglianza nella equazione precedente, si ottengono 2 famiglie di rette:

$$s_b : \quad x_2 - b = x_1 - x_2 + x_3 - 1 + \sqrt{3} = 0$$

e

$$s'_b : \quad x_2 - b = x_1 - x_2 + x_3 - 1 - \sqrt{3} = 0.$$

Ciascuno di essi e' un fascio di rette parallele nel piano opportuno dato dalla seconda equazione.

Esercizio 10: Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio cartesiano, con riferimento standard $(O; x_1, x_2, x_3)$.
Siano date la retta r, passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e con vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e la retta s, di equazioni cartesiane

$$X_1 - 2 = 2X_2 - X_3 - 2 = 0.$$

(i) Verificare che r e s sono rette sghembe.

(ii) Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r e parallelo a s.
(iii) Prendere un punto Q qualsiasi su s e calcolare la distanza di Q da π (equivalentemente, calcolare la *distanza tra le due rette sghembe*)
Svolgimento: (i) La retta s ha giacitura data dal sistema omogeneo

$$X_1 = 2X_2 - X_3 = 0.$$

Pertanto, risolvendo tale sistema, vediamo che s ha come vettore direttore il vettore $\overline{w}$ di coordinate (scritte per comodita' per riga) $(0, 1, 2)$. Poichè i due vettori direttori non sono proporzionali, si deduce che le rette r e s non sono parallele.

Se non fossero sghembe, poiche' non sono coincidenti, allora dovrebbero intersecarsi in un solo punto. I punti della retta r hanno coordinate

$$(1 + t, -1 - t, 1 + t)$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Sostituire queste coordinate variabili nelle equazioni che definiscono s equivale a cercare il valore di t per cui si ha l'eventuale intersezione tra r e s. Seguendo tale procedimento, si ottiene il sistema di equazioni lineari nel parametro t:

$$t - 1 = 3t + 5 = 0$$

che è manifestamente incompatibile. Quindi $r \cap s = \emptyset$; pertanto le due rette sono sghembe.
(ii) Il piano richiesto deve contenere nella sua giacitura i vettori direttori di r e di s. Inoltre, deve anche contenere un punto di r. Un vettore normale a π e' il vettore

$$\underline{n} = \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di π e' della forma

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0.$$

Il passaggio per P fornisce l'equazione

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 = 0.$$

(iii) Prendiamo ad esempio il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ su s. Pertanto

$$d(Q,\pi) = \frac{|6+2|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{4}{7}\sqrt{14}.$$

Esercizio 11: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, sia dato il piano π di equazione cartesiana $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$ ed un suo punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trovare l'equazione del fascio di rette proprio contenuto nel piano π e di centro P.

Svolgimento. Prendiamo una retta s passante per P ma non contenuta nel piano dato; per esempio

$$\begin{cases} X_1 = & 1+t \\ X_2 = & 5-2t \\ X_3 = & 1+t \end{cases}.$$

Tale retta non è parallela a π. Inoltre essa è incidente a π nel punto P. Le sue equazioni cartesiane sono:

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + 2X_3 - 7 = 0 \end{cases}.$$

Il fascio di piani di asse la retta s ha equazione

$$\lambda X_1 + \mu X_2 + (2\mu - \lambda)X_3 - 7\mu = 0.$$

L'equazione del fascio cercato è quindi:

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0 \\ \lambda X_1 + \mu X_2 + (2\mu - \lambda)X_3 - 7\mu = 0 \end{cases}.$$

Esercizio 12. Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortonormale standard e con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3), sia data la sfera $\mathcal{S}$ di equazione cartesiana

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 4X_1 + 2X_2 - x_3 + 1 = 0.$$

Determinare le coordinate del centro C ed il raggio r della sfera.

Svolgimento: Se $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ e' il centro di $\mathcal{S}$, ricordiamo che un'equazione cartesiana di $\mathcal{S}$ e' anche

$$(X_1 - \alpha)^2 + (X_2 - \beta)^2 + (X_3 - \gamma)^2 = r^2.$$

Sviluppando tutti i quadrati ed eguagliano coefficiente per coefficiente con l'equazione data di $\mathcal{S}$ nel testo dell'esercizio, otteniamo

$$\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = \frac{1}{2},\ r = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Esercizio 13. Trovare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il piano

$$\alpha :\ X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0$$

risulti, rispettivamente, secante, tangente o esterno alla sfera $\mathcal{S}$, di equazione cartesiana:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_1 - 4X_2 + 1 = 0.$$

Svolgimento: Il piano α risulta secante, tangente o esterno a $\mathcal{S}$ a seconda che la distanza dal centro della sfera $\mathcal{S}$ al piano α risulti rispettivamente minore, uguale o maggiore del raggio di $\mathcal{S}$.
Come in uno degli esercizi precedenti, troviamo che il centro C di $\mathcal{S}$ e'

$$C := (1, 2, 0);$$

il raggio e' invece

$$r = 2.$$

Si ha

$$d(C, \alpha) = \frac{|5 + k|}{\sqrt{6}}.$$

Pertanto, α risulta:

- secante $\mathcal{S}$ se $\frac{|5+k|}{\sqrt{6}} < 2$, i.e.

$$-2\sqrt{6} - 5 < k < 2\sqrt{6} - 5;$$

- tangente a $\mathcal{S}$ se $\frac{|5+k|}{\sqrt{6}} = 2$, i.e.

$$k = \pm 2\sqrt{6} - 5;$$

in altre parole, nel fascio di piani paralleli di equazione cartesiana $X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0$, con k parametro variabile, esistono 2 distinti piani tangenti alla sfera $\mathcal{S}$, ovviamenti in due punti distinti su $\mathcal{S}$;

- esterno a $\mathcal{S}$ per $k > 2\sqrt{6} - 5$ oppure $k < -2\sqrt{6} - 5$.