Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia)
FORMULE DI GEOMETRIA IN $\mathbb{R}^2$. TRASFORMAZIONI DI $\mathbb{R}^2$. CIRCONFERENZE.
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano vettoriale euclideo, munito di base canonica e, e prodotto scalare standard. Siano $\overline{v} = (1, 2)$ e $\overline{w} = (-1, -1)$ due vettori espressi in componenti rispetto alla base canonica e.
(i) Calcolare l'orientazione della coppia ordinata $\{\overline{v},\ \overline{w}\}$, i.e. $Or(\overline{v}, \overline{w})$;
(ii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse x_1. Calcolare $Or(S_0(\overline{v}), S_0(\overline{w}))$;
(iii) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta vettoriale passante per l'origine e formante un angolo convesso φ con l'asse x_1. Calcolare $Or(S_\varphi(\overline{v}), S_\varphi(\overline{w}))$;
(iv) Sia R_ψ la rotazione di centro l'origine e angolo ψ. Calcolare $Or(R_\psi(\overline{v}), R_\psi(\overline{w}))$.
Svolgimento. (i) Osserviamo che

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 = Or(\overline{v}, \overline{w})$$

percio' la coppia ordinata e' orientata positivamente.
(ii) $Or(S_0(\overline{v}), S_0(\overline{w})) = det(S_0)Or(\overline{v}, \overline{w}) = -1 = -Or(\overline{v}, \overline{w})$.
(iii) Come prima $Or(S_\varphi(\overline{v}), S_\varphi(\overline{w})) = det(S_\varphi) = -1 = -Or(\overline{v}, \overline{w})$.
(iv) $Or(R_\psi(\overline{v}), R_\psi(\overline{w})) = det(R_\psi) = 1 = Or(\overline{v}, \overline{w})$.

Esercizio 2. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, siano assegnati i punti

$$P = (1, 2),\ Q = (2, -1),\ R = (1, 0),$$

le cui coordinate sono scritte per comodita' per riga.

Trovare il punto Q' simmetrico di Q rispetto a P e la retta $\underline{r}$ simmetrica rispetto a P della retta $\underline{r}_{RQ}$.
Svolgimento. Il punto Q' e' il punto, diverso da Q, che giace sulla retta per P e Q e che' e' a distanza pari a $d(P, Q)$ da P. La retta $\underline{r}$ e' la retta parallela alla retta per R e Q e che passa per Q' trovato precedentemente.

Esercizio 3. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, sia $\mathcal{Q}$ il trapezio di vertici: $(1,1), \quad (6,1), \quad (2,3), \quad (3,3).$
(i) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la traslazione $T_{\overline{p}}$, dove il vettore $\overline{p} = (0,-1)$;
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la riflessione S_0 rispetto all'asse x_1;
(iii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione R_π di angolo π.
Svolgimento: (i) Si tratta del trapezio $\mathcal{Q}'$ di vertici $(1,0), \quad (6,0), \quad (2,2), \quad (3,2).$
(ii) La matrice di S_0 e' data da

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(1,-1), \quad (6,-1), \quad (2,-3), \quad (3,-3).$
(iii) La matrice di R_π e' data da

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $B(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(-1,-1), \quad (-6,-1), \quad (-2,-3), \quad (-3,-3).$

Esercizio 4. Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato in $\mathbb{R}^2$ di vertici: $(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1).$
(i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato $\mathcal{Q}$ in se stesso?
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.
Svolgimento. (i) Sono tutti gli angoli della forma $\varphi = k\frac{\pi}{2}$, con k un numero intero.
(ii) La matrice della rotazione $R_{\pi/4}$ e' data da:

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\mathcal{Q})$ e' il quadrato di vertici $(-\sqrt{2},0), \quad (0,\sqrt{2}), \quad (0,-\sqrt{2}), \quad (\sqrt{2},0).$

Esercizio 5. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$.
(i) Scrivere le equazioni della rotazione $R_{P_0,\pi/6}$ di centro il punto $P_0 = (1,2)$ ed angolo $\pi/6$;
(ii) Scrivere le equazioni della simmetria S_r rispetto alla retta

$$r: \quad x_1 - x_2 + 1 = 0;$$

(iii) Verificare che la retta s, passante per P_0 e di equazione cartesiana

$$(2-\sqrt{3})x_1 - x_2 + \sqrt{3} = 0$$

e' tale che $S_r \circ S_s = R_{P_0,\pi/6}$.

Svolgimento: (i) La matrice della rotazione di angolo $\pi/6$ attorno all'origine e':

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio', le formule di rotazione sono, in forma vettoriale, date da

$$\underline{x}' = A(\underline{x}) + P_0 - A(P_0),$$

equivalentemente in forma cartesiana

$$x_1' = 1/2(\sqrt{3}x_1 - x_2 + 4 - \sqrt{3}) \quad x_2' = 1/2(x_1 + \sqrt{3}x_2 + 3 - 2\sqrt{3}).$$

(ii) Sia $P = (\alpha, \beta)$. La retta n passante per P e perpendicolare a r ha equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = \alpha + \beta.$$

Sia $N = r \cap n$, che ha coordinate

$$N = (\frac{1}{2}(\alpha + \beta - 1), \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)).$$

Allora P' sara' il simmetrico di P rispetto a r se e solo se $P' = 2N - P = (\beta - 1, \alpha + 1)$. Questo significa che le equazioni della simmetria sono

$$x_1' = x_2 - 1 \quad x_2' = x_1 + 1.$$

(iii) Se deve essere $S_r \circ S_s = R_{P_0,\pi/6}$, allora $S_s = S_r^{-1} \circ R_{P_0,\pi/6} = S_r \circ R_{P_0,\pi/6}$, perche' $S_r = S_r^{-1}$. Le equazioni di S_s sono quindi:

$$x_1' = 1/2(\sqrt{3}x_1 + x_2) - \sqrt{3}/2 \quad x_2' = 1/2(x_1 - \sqrt{3}x_2 + 3) + \sqrt{3}.$$

Mediante questa trasformazione, notiamo che il luogo fissato da S_s e' proprio la retta s, come volevasi dimostrare.

Esercizio 6. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x_1, x_2)$, sia data la retta

$$r: \; X_1 + 2X_2 - 3 = 0.$$

(i) Determinare le formule di riflessione rispetto a r.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta per riflessione rispetto a r della circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio 2.

Svolgimento. (i) Sia $P = (a, b)$ il punto generico di $\mathbb{R}^2$. La retta perpendicolare a r passante per P ha equazioni parametriche

$$X_1 = a + t, \; X_2 = b + 2t.$$

L'intersezione con r determina

$$t = -\frac{2}{5}a - \frac{4}{5}b + \frac{6}{5}.$$

Pertanto le formule di riflessione sono

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ 12/5 \end{pmatrix}.$$

(ii) Poiche' una riflessione e' un'isometria, e sufficiente conoscere le coordinate del riflesso di C, visto che il raggio rimarra' invariato. Pertanto, poiche' $f(C) = \begin{pmatrix} -36/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$, l'equazione cartesiana della riflessa di $\mathcal{C}$ e'

$$(X_1 + 36/5)^2 + (X_2 - 1/5)^2 = 4.$$

Esercizio 7. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x_1, x_2)$, sia data la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio 1. Sia inoltre $P = \begin{pmatrix} \frac{6+\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2+\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$.

(i) Determinare l'equazione cartesiana della retta ℓ tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ in P.

(ii) Scrivere l'equazione del fascio (proprio) di rette di centro $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e determinare l'unica retta del fascio parallela a ℓ.

(iii) Data l'affinita'

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

disegnare nel piano $f(\mathcal{C})$.

Svolgimento. (i) Un vettore normale a $\mathcal{C}$ in P e' dato dal vettore $P -_a C = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$. In altre parole, un'equazione cartesiana per ℓ e' data da

$$1(X_1 - (\frac{6+\sqrt{2}}{2})) + 1(X_2 - (\frac{2+\sqrt{2}}{2})) = 0$$

che fornisce $X_1 + X_2 - 4 - \sqrt{2} = 0$.
(ii) L'equazione del fascio di rette e' $\lambda(X_1 - 4) + \mu(X_2 - 3) = 0$, cioe' $\lambda X_1 + \mu X_2 - 4\lambda + 3\mu = 0$. La condizione di parallelismo con ℓ fornisce che $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ deve essere proporzionale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, i.e. $\lambda = \mu$, che determina $X_1 + X_2 - 7 = 0$.
(iii) Notiamo che $f(\mathcal{C})$ non e' altro che l'ellisse con centro di simmetria $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ e semi-assi rispettivamente 2 e 3.

Esercizio 8: Siano r_1 ed r_2 due rette passanti ambedue per il punto $p_0 = (2, -1)$ e rispettivamente per $q_1 = (18/5, 1/5)$ la prima e per $q_2 = (2, 1)$ la seconda. Assumiamo che tali rette siano tangenti ad una circonferenza $\mathcal{C}$ rispettivamente in q_1 ed in q_2.
(i) Determinare il centro C, il raggio r e l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$;
(ii) Disegnare la circonferenza $\mathcal{C}$.
Svolgimento. (i) Denotiamo con n_i la retta perependicolare alla retta r_i e passante per il punto q_i, $1 \leq i \leq 2$. Allora, il centro C sara' determinato dall'intersezione $n_1 \cap n_2$ mentre il raggio sara' dato dalla distanza $d(C, q_i)$, per uno qualsiasi dei due punti q_i, $1 \leq i \leq 2$.

Un vettore direttore di r_1 e' $(4, 3)$, percio' la retta n_1 ha equazione cartesiana $4x_1 + 3x_2 - 15 = 0$. Un vettore direttore di r_2 e' $(0, 1)$, percio' la retta n_2 ha equazione cartesiana $x_2 - 1 = 0$. Allora $C = (3, 1)$ mentre $r = d(C, q_1) = d(C, q_2) = 1$.

L'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ e' data da $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$, cioe':

$$x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 + 9 = 0.$$

(ii) Per disegnare la circonferenza, basta considerare C e r.

Esercizio 9: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ sono dati i tre punti non allineati di coordinate:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare l'equazione cartesiana dell'unica circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i tre punti dati.
(ii) Disegnare la circonferenza $\mathcal{C}$.
(iii) Determinare l'equazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P \in \mathcal{C}$.
Svolgimento. (i) Il centro della circonferenza da determinare e' il punto C intersezione degli assi delle due corde $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$. Percio', il punto medio di $\overline{PQ}$ e' $M_{PQ} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, mentre il punto medio di $\overline{QR}$ e' $M_{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Invece, la direzione del vettore $\vec{PQ} = (-1, 1)$, mentre la direzione del vettore $\vec{QR} = (0, -3) = (0, -1)$.

Quindi, l'asse del segmento $\overline{PQ}$ e' la retta per M_{PQ} con parametri direttori determinati da un vettore normale a $\vec{PQ}$, per esempio $(1, 1)$. Un'equazione cartesiana di tale asse e' quindi:

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Analogamente, l'asse del segmento $\overline{QR}$ e' la retta per M_{QR} con parametri direttori determinati da un vettore normale a $\vec{QR}$, per esempio $(1, 0)$. Un'equazione cartesiana di tale asse e':

$$2x_2 - 1 = 0.$$

Il loro punto di intersezione e' il punto C di coordinate $C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Il raggio della circonferenza e' dato da

$$r = d(C, P) = \sqrt{10}/2.$$

Percio', l'equazione della circonferenza voluta si determina con

$$(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 = 10/4.$$

(ii) Per disegnare la circonferenza, basta considerare il centro ed il raggio determinati al punto (i).

(iii) L'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ in P e' data dalla formula

$$(2-1/2)(x_1-2)+(1-1/2)(x_2-1)=0$$

cioe':

$$3x_1+x_2-7=0.$$