

1. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbf{R}^2 , munito del prodotto scalare standard, si consideri il vettore $u = (-1, 1)$. Determinare tutti i vettori x che sono ortogonali ad u e che hanno norma uguale a 2.

Svolgimento: $x = (x_1, x_2)$ e' tale che $0 = \langle u, x \rangle = x_2 - x_1$; percio' $x = (\alpha, \alpha)$. Inoltre $\|x\| = 2$ implica $\alpha = \pm\sqrt{2}$. Percio', i vettori cercati sono

$$x = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ oppure } x = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

2. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbf{R}^3 , munito del prodotto scalare standard, siano dati i vettori:

$$v_1 = (1, 2, -1), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (1, 2, 0).$$

- (a) determinare $\|v_1\|$, $\|v_2\|$, il prodotto scalare $\langle v_1, v_2 \rangle$ e l'angolo formato da v_2 e v_3 ;
 (b) determinare il versore di v_1 ;
 (c) determinare tutti i vettori ortogonali a v_1 e v_2 e tutti i vettori ortogonali a v_3 .

Svolgimento: (a) $\|v_1\| = \sqrt{6}$ e $\|v_2\| = \sqrt{2}$; per definizione di prodotto scalare standard, si ha che $\langle v_1, v_2 \rangle = 1 - 1 = 0$, cioe' i due vettori sono ortogonali. Se infine θ denota l'angolo formato da v_2 e v_3 , ricordiamo che

$$\cos(\theta) = \langle v_2, v_3 \rangle / (\|v_2\| \|v_3\|) = 1/\sqrt{10}.$$

- (b) Il versore di v_1 e'

$$u_1 = v_1 / \|v_1\| = (1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}).$$

- (c) Un vettore $t = (x, y, z)$ e' ortogonale a v_1 e a v_2 se e solo se

$$\langle t, v_1 \rangle = \langle t, v_2 \rangle = 0.$$

Si ottiene cosi' un sistema lineare

$$x + 2y - z = x + z = 0,$$

da cui si ricava che

$$x = \alpha, y = -\alpha, z = -\alpha, \alpha \in \mathbf{R}.$$

Percio' il luogo dei vettori cercati e' il sottospazio vettoriale generato dal vettore $(1, -1, -1)$. Analogamente a prima, un vettore $t = (x, y, z)$ e' ortogonale a v_3 se e solo se $\langle t, v_3 \rangle = 0$, che determina l'equazione

$$x + 2y = 0,$$

da cui si ricava che

$$x = -2\lambda, y = \lambda, z = \mu, \lambda, \mu \in \mathbf{R}.$$

Percio' i vettori cercati formano un iperpiano di \mathbf{R}^3 , cioe' un sottospazio vettoriale di dimensione 2. Tale sottospazio e' generato dai vettori

$$(-2, 1, 0) \text{ e } (0, 0, 1),$$

ottenuti ponendo, rispettivamente, $\lambda = 1, \mu = 0$ e $\lambda = 0, \mu = 1$.

3. Determinare una base ortonormale di \mathbf{R}^3 , rispetto al prodotto scalare standard, costruita a partire dalla base $B := \{v_1, v_2, v_3\}$, dove $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$.

Svolgimento: Si procede con il metodo di Gram-Schmidt. Determiniamo il versore u_1 di v_1 , cioè:

$$u_1 = v_1 / \|v_1\| = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}).$$

Determiniamo da v_2 un vettore v'_2 ortogonale a v_1 , ponendo:

$$v'_2 = v_2 - (\langle v_2, u_1 \rangle)u_1 = v_2 - (\langle v_2, u_1 \rangle / \|v_1\|^2)v_1 = (-1/2, 1, 1/2).$$

In seguito normalizziamo v'_2 , ponendo

$$u_2 = v'_2 / \|v'_2\| = (-\sqrt{2}/2\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}, \sqrt{2}/2\sqrt{3}).$$

Definiamo infine un vettore v'_3 , ortogonale a u_1 e u_2 , ponendo

$$v'_3 = v_3 - (\langle v_3, u_1 \rangle)u_1 - (\langle v_3, u_2 \rangle)u_2 = v_3 - (\langle v_3, u_1 \rangle / \|v_1\|^2)v_1 - (\langle v_3, u_2 \rangle / \|v_2\|^2)v_2 = (1/3, 1/3, -1/3). \blacksquare$$

Normalizzando quest'ultimo vettore, si ha:

$$u_3 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}).$$

La base cercata è

$$B := \{u_1, u_2, u_3\}.$$

4. Sia \mathbf{R}^3 munito di prodotto scalare standard. Determinare una base ortonormale del sottospazio W di \mathbf{R}^3 generato dai vettori $w_1 = (1, 1, 1)$ e $w_2 = (0, 1, 1)$.

Svolgimento: Poiché i vettori w_1 e w_2 sono linearmente indipendenti, essi formano una base B per un sottospazio vettoriale W di dimensione 2. Poiché in \mathbf{R}^3 si ha $\langle w_1, w_2 \rangle = 2 \neq 0$, la base B di W non è ortonormale. Applicando il metodo di Gram-Schmidt alla base B , si ottiene una base ortonormale per W dove precisamente i vettori sono

$$u_1 = w_1 / \|w_1\| = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \text{ e } u_2 = w'_2 / \|w'_2\| = (-2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$$

dove $w'_2 = w_2 - (\langle w_2, u_1 \rangle)u_1$.

5. Sia \mathbf{R}^5 munito di prodotto scalare standard. Determinare una base ortonormale del sottospazio U di \mathbf{R}^5 così definito:

$$U = \{(x_1, x_2, \dots, x_5) \in \mathbf{R}^5 : x_1 + x_2 + 2x_3 = x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = x_2 + x_4 = 0\}.$$

Svolgimento: Una base B di U è data da due autosoluzioni linearmente indipendenti del sistema lineare omogeneo di 3 equazioni che definisce U :

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = x_1 + 2x_3 - x_4 - x_5 = x_2 + x_4 = 0.$$

Per esempio, si ha

$$B = \{v_1 = (2, 0, -1, 0, 0), v_2 = (0, 2, -1, -2, 0)\}.$$

Applichiamo Gram-Schmidt a tale base, ponendo $u_1 = v_1/||v_1|| = (2/\sqrt{5}, 0, -1/\sqrt{5}, 0, 0)$, $v'_2 = v_2 - (\langle v_2, u_1 \rangle)u_1$ e scegliendo come base $\{u_1, u_2\}$ dove $u_2 = v'_2/||v'_2||$.

6. Nello spazio vettoriale euclideo \mathbf{R}^3 , munito del prodotto scalare standard, determinare il vettore proiezione ortogonale del vettore $v_1 = (1, 1, 0)$ sul vettore $v_2 = (1, 0, 1)$.

Svolgimento: Il vettore w , proiezione ortogonale del vettore v_1 sul vettore v_2 e' per definizione il vettore multiplo di v_2 secondo il coefficiente

$$\langle v_1, v_2 \rangle / ||v_2||^2.$$

Poiche' $\langle v_1, v_2 \rangle = 1$ e $||v_2|| = \sqrt{2}$, il vettore cercato e' $\pi_{v_2}(v_1) = (1/2, 0, 1/2)$.