Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Ingegneria dell'Edilizia e Edile/Architettura
Esercizi Svolti GEOMETRIA - a.a. 2010/2011
Docente: Prof. F. Flamini

Soluzioni FOGLIO 8 - Esercizi Riepilogativi

Nei seguenti esercizi, si consideri fissato un riferimento proiettivo per $\mathbb{P}^1$, rispettivamente $\mathbb{P}^2$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1]$, rispettivamente $[x_0, x_1, x_2]$.

Esercizio 1: Sia ℓ la retta di $\mathbb{P}^2$, di equazione cartesiana $X_0 + X_1 = 0$. Si considerino i punti $P = [0, 1, -1]$, $Q = [1, 0, 0]$, $R = [1, -1, 1]$ e $K = [0, -2, 2]$. Sia $S := \{P, Q, R, K\}$ il sottoinsieme di punti nel piano proiettivo.
(i) Quanti elementi ha il sottoinsieme S di $\mathbb{P}^2$?
(ii) Determinare quali punti di S giacciono su ℓ.
(iii) Verificare che i punti di S sono collineari, cioe' stanno su una retta m di $\mathbb{P}^2$.
Svolgimento: (i) S e' costituito solo da tre punti, dato che P e K sono lo stesso punto nel proiettivo.
(ii) L'unico punto in S che giace su ℓ e' il punto R, dato che gli altri non soddisfano l'equazione di ℓ.
(iii) Poiche', come vettori di $\mathbb{R}^3$, $(0, 1, -1) + (1, 0, 0) = (1, 1, -1)$, allora vuol dire che i corrispondenti punti nel proiettivo sono collineari, cioe' giacciono su un'opportuna retta m, che e' il proiettivizzato del piano vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori $(0, 1, -1)$ e $(1, 0, 0)$.

Esercizio 2: (i) In $\mathbb{P}^2$, con riferimento proiettivo usuale, si considerino i punti $[1, 2, 3]$, $[1, 0, -1]$, $[2, 1, 0]$. Stabilire se sono collineari (i.e. se giacciono su una retta).
(ii) Determinare l'equazione omogenea della retta per i due punti $P = [1, 1, -1]$ e $Q = [1, 1, 0]$ di $\mathbb{P}^2$.
(iii) Determinare l'intersezione delle rette $X_0 - X_1 + X_2 = 0$ e $2X_0 - X_1 - X_2 = 0$ in $\mathbb{P}^2$.
Svolgimento: (i) Poiche' i vettori di $\mathbb{R}^3$ sono tali che

$$(2, 1, 0) = \frac{1}{2}(1, 2, 3) + \frac{3}{2}(1, 0, -1)$$

allora i tre punti sono collineari in $\mathbb{P}^2$.

(ii) La retta per P e Q e' unica e corrisponde al proiettivizzato dello span in $\mathbb{R}^3$ dei vettori corrispondenti, cioe' e'

$$X_0 - X_1 = 0.$$

(iii) Le due rette si incontrano in $K = [2, 3, 1]$. Infatti, i corrispondenti piani vettoriali di $\mathbb{R}^3$ si intersecavano nella retta vettoriale che ha come vettore direttore $(2, 3, 1)$.

Esercizio 3: Nel piano affine $\mathbb{R}^2$ con coordinate affini (x, y), sia data la retta r di equazione cartesiana

$$4x - 3y + 5 = 0.$$

(i) Determinare il punto improprio di r.
(ii) Stabilire le intersezioni (eventualmente all'infinito) che r ha con le rette $\sigma: \; x - y + 2 = 0$, $\tau: \; 3x + 4y = 0$ e $\gamma: 8x - 6y + 1 = 0$.
(iii) Denotata con $\overline{r}$ la chiusura proiettiva di r in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare le equazioni delle rette che $\overline{r}$ individua nelle altre 2 carte affini con coordinate affini rispettivamente (s, t) e (u, v).
Svolgimento: (i) Il punto all'infinito di r nella carta affine data e' il punto di coordinate omogenee $[0, 3, 4]$ dato che dall'equazione cartesiana di r deduciamo che i parametri direttori di r sono $l = 3$ e $m = 4$.
(ii) Notiamo che r intersechera' gia' nel piano affine di partenza sia la retta σ che la retta τ, dato che i loro vettori normali sono linearmente indipendenti da quello di r. Invece la retta γ e' manifestamente parallela a r, poiche' hanno giacitura proporzionale. Pertanto r e γ si intersecheranno in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ma non nel piano affine, infatti il loro punto di intersezione e', in coordinate omogenee $[0, 3, 4]$.

Invece l'intersezione di r con σ e con τ e' gia' visibile nella carta affine di partenza. Questi punti sono, rispettivamente, $r \cap \sigma = P = (1, 3)$ e $r \cap \tau = Q = (-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$. Tali punti corrisponderanno, rispettivamente, ai punti di coordinate omogenee $[0, 1, 3]$ e $[5, -4, 3]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.
(iii) L'equazione di $\overline{r}$ nelle coordinate omogenee di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e' $4X_1 - 3X_2 + 5X_0 = 0$. Pertanto, nel piano affine con coordinate $s = \frac{X_0}{X_1}, t = \frac{X_2}{X_1}$ la retta $\overline{r}$ individua la retta $5s - 3t + 4 = 0$. Analogamente, nel piano affine con coordinate $u = \frac{X_0}{X_2}, v = \frac{X_1}{X_2}$ la retta $\overline{r}$ individua la retta $5u + 4v - 3 = 0$.