Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edilizia e Edile-Architettura) - a.a. 2010/2011
I Semestre
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Classificare la quadrica Σ di $\mathbb{R}^3$, di equazione cartesiana

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 - 3X_1 - 3X_2 + 2 = 0.$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.
Svolgimento: Per compiere la classificazione, non è richiesto di svolgere necessariamente l'algoritmo di riduzione a forma canonica affine di Σ. Quando il polinomio che rappresenta la quadrica è abbastanza semplice, possiamo usare dei metodi più rapidi. Ad esempio il seguente: osserviamo che l'equazione di Σ si può scrivere anche come

$$(X_1 + X_2)^2 - 3(X_1 + X_2) + 2 = 0.$$

Ponendo $t := X_1 + X_2$ si ottiene l'equazione di secondo grado in t,

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

Tale equazione ha le due soluzioni $t = 1$ e $t = 2$. Ciò significa che possiamo fattorizzare il polinomio in t come

$$t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2) = 0.$$

Risostituendo $t = X_1 + X_2$ in questa fattorizzazione, abbiamo quindi

$$(X_1 + X_2)^2 - 3(X_1 + X_2) + 2 = (X_1 + X_2 - 1)(X_1 + X_2 - 2) = 0.$$

Questo significa che la quadrica Σ è costituita da due piani paralleli; infatti le equazioni cartesiane dei due piani non sono proporzionali ed entrambi hanno giacitura $X_1 + X_2 = 0$. Quindi Σ è di tipo (16) nella tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche.
Un modo alternativo per la classificazione affine è invece quello di notare che la matrice simmetrica completa $\widetilde{A}$ ha rango 2. Pertanto Σ è doppiamente degenere. Inoltre, la matrice A della forma quadratica associata a Σ ha rango 1. Perciò, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche, deduciamo che o la quadrica è della

tipologia (15) e quindi è priva di punti reali oppure è della tipologia (16), ed è quindi costituita da due piani paralleli. Facilmente si vede che Σ contiene il punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, quindi Σ deve essere necessariamente di tipo (16).

Ne segue che, in un opportuno riferimento di $\mathbb{R}^3$, $(O; w_1, w_2, w_3)$, dove le w_i sono le coordinate in tale riferimento per $1 \leq i \leq 3$, la forma canonica affine di Σ sarà $W_1^2 = 1$.

Esercizio 2. Dedurre la forma canonica affine della quadrica

$$\Sigma : \quad X_1^2 + X_2^2 - 2X_3^2 + 4X_1 - 2 = 0.$$

Svolgimento: Un modo per risolvere l'esercizio è il seguente. Osserviamo che Σ si può scrivere come

$$(X_1^2 + 4X_1 + 4 - 4) + X_2^2 - 2X_3^2 - 2 = 0,$$

ossia

$$(X_1 + 2)^2 + X_2^2 - 2X_3^2 - 6 = 0.$$

Se facciamo la sostituzione

$$Y_1 = X_1 + 2, \;\; Y_2 = X_2, \;\; Y_3 = X_3,$$

che equivale a traslare l'origine del riferimento, in tali nuove coordinate l'equazione di Σ diventa

$$\frac{Y_1^2}{6} + \frac{Y_2^2}{6} - \frac{Y_3^2}{3} = 1.$$

Visto che una traslazione è un'isometria, la precedente equazione è una forma canonica metrica contenuta nella tabella fondamentale per la classificazione metrica delle quadriche. Quindi Σ è un iperboloide iperbolico (i.e. ad una falda). Pertanto, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine delle quadriche, la sua forma canonica affine sarà in opportune coordinate

$$W_1^2 + W_2^2 - W_3^2 = 1.$$

Esercizio 3. Riconoscere la tipologia affine della quadrica

$$\Sigma : X_1^2 - 4X_2^2 - 2X_3 = 0.$$

(i) Dedurre che Σ contiene due schiere di rette. Descrivere le rette di tali schiere.

(ii) Determinare equazioni di ciascuna delle due rette, una per ogni schiera, passanti per il punto $N = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Svolgimento: Notiamo che il rango della matrice simmetrica completa associata a Σ è 4. Pertanto la quadrica è generale. Il rango della matrice simmetrica A associata alla forma quadratica $\mathcal{Q}$ di Σ è invece 2. Pertanto, dalla tabella fondamentale per la classificazione affine, la quadrica Σ o è di tipo (5), i.e. è un paraboloide generale ellittico, oppure è di tipo (6), i.e. un paraboloide generale iperbolico.
Ricordiamo ora che il segno del determinante di una quadrica Σ è una proprietà affine. Vediamo che una quadrica nella tipologia (5) ha tale determinate che è $det\,\widetilde{A} = -\frac{1}{a^2b^2} < 0$, mentre nella tipologia (6) il determinante è $det\,\widetilde{A} = \frac{1}{a^2b^2} > 0$. Calcolando la matrice $\widetilde{A}$ della quadrica Σ data, vediamo che il suo determinante è 4. Pertanto, Σ è necessariamente di tipo (6), i.e. è un paraboloide iperbolico o ad una falda.
(i) Dalla teoria generale, sappiamo che un paraboloide generale iperbolico contiene due schiere di rette. Possiamo trovare esplicitamente equazioni per queste schiere. Infatti, se scriviamo l'equazione di Σ come

$$(X_1 + 2X_2)(X_1 - 2X_2) = 2X_3.$$

Allora, si vede che Σ contiene le 2 famiglie di rette:

$$l_t : \quad X_1 + 2X_2 - tX_3 = X_1 - 2X_2 - (2/t) = 0, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

e

$$m_s : \quad X_1 - 2X_2 - sX_3 = X_1 + 2X_2 - (2/s) = 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Osserviamo che, per ogni $t \neq t'$, l_t e $l_{t'}$ sono sghembe mentre per ogni t e s come sopra, l_t e m_s si intersecano in un punto.
(ii) Il passaggio per N comporta che $t = 1$ e $s = 1$, cioè si hanno la retta l_1 e la retta m_1 delle due schiere distinte.

Esercizio 4. Stabilire la natura delle quadrica Σ, di equazione cartesiana

$$X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 + X_1 + X_3 = 1.$$

Dedurre inoltre la sua forma canonica affine.

Svolgimento: Proponiamo una risoluzione alternativa e più geometrica, che utilizza alcuni degli argomenti on-line di approfondimento (lo studente puo' procedere nella risoluzione standard che conosce).
La matrice associata alla parte omogenea di grado 2 di Σ ha rango 1. Pertanto, dalla classificazione, abbiamo che in tal caso Σ è o un cilindro parabolico, o due piani paralleli o due piani coincidenti oppure la quadrica vuota. Facilmente si vede che Σ contiene punti reali, per esempio $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; quindi non può essere vuota.
Consideriamo il piano di equazione

$$X_1 + X_3 - 1 = 0.$$

Mettendo a sistema con l'equazione di Σ, si ottiene

$$X_1 + X_3 - 1 = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2 = 0,$$

cioè

$$X_1 + X_3 - 1 = (X_1 + X_2)^2 = 0$$

che è l'intersezione di un piano e di un piano contato 2 volte. Tale intersezione è pertanto una retta contata due volte. Non è difficile accorgersi che il piano $X_1 + X_3 - 1 = 0$ è il piano tangente a Σ nel punto P. Quindi Σ è necessariamente un cilindro parabolico. Infatti, se fosse stata o due piani paralleli o due piani coincidenti, questa intersezione sarebbe risultata uno dei piani costituenti Σ, contato con molteplicità.
La forma canonica affine di Σ è, in un opportuno riferimento,

$$Z_1^2 = Z_2.$$

Esercizio 5. Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ sia data la quadrica Σ di equazione

$$2X_1^2 + 2X_2^2 + 2X_3^2 + 4X_1X_3 - X_3 = 0.$$

Riconoscere il tipo di quadrica e scrivere, in un opportuno riferimento di coordinate (z_1, z_2, z_3), la forma canonica affine di Σ.

Svolgimento: Proponiamo anche qui una soluzione geometrica. La matrice simmetrica associata alla parte omogenea di grado due della quadrica Σ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha pertanto

$$det\ A = 0 \ \text{ e } \ r(A) = 2.$$

Se calcoliamo il polinomio caratteristico di A, si ha $P_A(T) = det\,(A_Q - TI) = -T(T-2)(T-4)$. Perciò, le soluzioni di tale polinomio sono

$$0, \ \ 2, \ \ 4.$$

Quindi, i due autovalori non-nulli di A hanno stesso segno. Dalla classificazione affine delle quadriche si ha perciò che Σ è o

(a) una quadrica vuota, oppure
(b) una retta contata due volte, oppure
(c) un cilindro ellittico, oppure
(d) un paraboloide ellittico.

Procediamo per esclusioni. Poiché l'origine O appartiene banalmente a Σ, allora la possibilità (a) viene scartata. Se intersechiamo Σ con il piano di equazione

$$X_1 + X_3 = 0$$

troviamo come curva intersezione

$$\begin{cases} X_1 + X_3 = 0 \\ 2X_2^2 - X_3 = 0 \end{cases}$$

che è una curva intersezione di un piano e di un cilindro parabolico, perciò anche la possibilità (b) viene scartata. Sia ora α il piano di equazione

$$X_3 = 0.$$

Intersecando Σ con α si ottiene

$$\begin{cases} X_3 = 0 \\ 2X_1^2 + 2X_2^2 = 0 \end{cases}$$

che è solo il punto origine O. Facilmente si vede che α è il piano tangente a Σ in O; pertanto si deduce che l'unica possibilità per Σ è (d). Infatti, se Σ fosse una retta doppia, non sarebbe definito un piano tangente in O mentre se fosse un cilindro ellittico, il piano tangente in un qualsiasi suo punto P è costante lungo tutta la retta generatrice del cilindro passante per P, e quindi la curva intersezione sarebbe la stessa generatrice contata con molteplicità 2. Quindi le possibilità (b) e (c) devono per forza escludersi.
(ii) Dal punto precedente, si deduce immeditamente che la forma canonica affine di Σ è, nelle opportune coordinate,

$$Z_1^2 + Z_2^2 = Z_3.$$

Esercizio 6. Studiare le sezioni della quadrica Σ di equazione cartesiana

$$X_1 X_2 = X_3$$

con i piani paralleli ai piani coordinati e riconoscere il tipo di quadrica.
Svolgimento: Intersecando Σ con i piani della forma $X_3 = k$, con $k \in \mathbb{R}$, si ottengono iperboli equilatere, per $k \neq 0$, aventi asintoti paralleli agli assi coordinati x_1 e x_2, mentre per $k = 0$ si ottiene la coppia di tali assi coordinati.
Intersecando con i piani paralleli a $X_1 = 0$, si ottengono ∞^1 rette di equazioni cartesiane

$$X_1 - t = X_2 - \frac{1}{t} X_3 = 0, \;\; t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Intersecando con i piani paralleli a $X_2 = 0$ si ottengono ∞^1 rette di equazioni cartesiane

$$X_2 - s = X_1 - \frac{1}{s} X_3 = 0, \;\; s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

La quadrica Σ è quindi una quadrica doppiamente rigata. Fra le quadriche doppiamente rigate ci sono l'iperboloide generale iperbolico (o, ad una falda) oppure il paraboloide generale ipebolico (o, a sella). Poichè la matrice simmetrica associata alla forma quadratica $\mathcal{Q}$ di Σ è di rango 2, allora Σ è necessariamente un paraboloide iperbolico.

Esercizio 7 Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, siano date le tre rette

$$r_1 : \;X_1 = t, X_2 = -t, X_3 = -1, \; t \in \mathbb{R}$$

$$r_2 : \; \begin{cases} X_1 - X_2 = 0 \\ X_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

e

$$r_3: \ X_1 = 1, X_2 = s, X_3 = -s, \ s \in \mathbb{R}.$$

(i) Verificare che le tre rette sono sghembe a due a due e che non sono parallele ad uno stesso piano vettoriale.
(ii) Determinare l'equazione cartesiana della quadrica Σ ottenuta come luogo delle rette ℓ di $\mathbb{R}^3$ che si *appoggiano* (cioe' sono incidenti) alle tre rette r_i, $1 \leq i \leq 3$.
(iii) Classificare Σ, scrivendo in opportune coordinate la sua forma canonica affine. Verificare che Σ contiene 2 schiere di rette e trovare le equazioni cartesiane delle due schiere.
Svolgimento: (i) Con semplici conti, notiamo che $r_i \cap r_j = \emptyset$, per $1 \leq i \neq j \leq 3$. Inoltre, i vettori direttori sono rispettivamente

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i quali formano una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Pertanto, le tre rette sono necessariamente a due a due sghembe e non possono essere tutte parallele ad una medesima giacitura fissata.
(ii) La superficie Σ e' il luogo delle rette ℓ passanti per un punto generale di r_1 e che si appoggiano (cioe' sono incidenti) alle rimanenti due rette. Il punto generale di r_1 e' $P = \begin{pmatrix} t \\ -t \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. La generica retta ℓ allora si puo' rappresentare come l'intersezione del piano α_2, passante per P e r_2, e del piano α_3, passante per P e r_3. In definitiva abbiamo

$$\begin{cases} X_1 - X_2 + t(X_3 - 1) & = & 0 \\ (t+1)(X_1 - 1) + (t-1)(X_2 + X_3) & = & 0 \end{cases}$$

Eliminando il parametro t dalle due equazioni, si ottiene l'equazione cartesiana di Σ data da

$$X_1^2 - X_2^2 + X_3^2 + 1 = 0.$$

(iii) Studiando la matrice completa e la forma quadratica associate alla quadrica Σ, notiamo subito che Σ e' un iperboloide iperbolico o ad una falda. In opportune coordinate, la sua forma canonica affine sara'

$$W_1^2 - W_2^2 - W_3^2 = 1.$$

Le rette ℓ sono le rette di una schiera di Σ, diversa dalla schiera cui appartengono le rette r_1, r_2 e r_3. La prima schiera e' data dall'equazione cartesiana

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - t(1 - X_3) & = & 0 \\ X_1 + X_2 - \frac{1}{t}(1 + X_3) & = & 0, \ t \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

mentre la seconda schiera e' data da

$$\begin{cases} X_1 - X_2 - s(1 + X_3) & = & 0 \\ X_1 + X_2 - \frac{1}{s}(1 - X_3) & = & 0, \ s \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Esercizio 8 Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, si consideri la quadrica Σ di equazione cartesiana

$$8X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + 6X_1X_2 - 2X_1X_3 + X_1 - X_3 = 0.$$

(i) Classificare Σ.
(ii) Dedurre la forma canonica affine di Σ, in opportune coordinate (z_1, z_2, z_3) di $\mathbb{R}^3$.
(iii) Riconoscere la tipologia della conica $\mathcal{C}$ ottenuta intersecando la quadrica Σ con il piano α di equazione cartesiana $X_1 - X_3 = 0$.
(iv) Motivare la presenza su Σ della conica $\mathcal{C}$ sia dal punto di vista geometrico dell'intersezione $\Sigma \cap \alpha$, sia in relazione a quanto trovato al punto (i).
Svolgimento: (i) La matrice completa della quadrica Σ e' la matrice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & 8 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sviluppando il determinate di $\widetilde{A}$ con il metodo di Laplace rispetto ad esempio alla prima riga, otteniamo

$$det(\widetilde{A}) = 1 > 0.$$

Pertanto, Σ e' una quadrica generale ed il segno del determinante della matrice simmetrica completa (che e' un invariante metrico ed affine di Σ) e' positivo.
Per quanto riguarda la matrice simmetrica A associata alla forma quadratica di Σ, essa ha manifestamente rango 2.
Dalla tabella della classificazione, deduciamo che Σ e' necessariamente un paraboloide iperbolico (o a sella).

(ii) La sua forma canonica affine, in opportune coordinate, e'

$$Z_1^2 - Z_2^2 = Z_3.$$

(iii) Se intersechiamo Σ con il piano α otteniamo il sistema

$$5X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 = X_1 - X_3 = 0.$$

Ponendo $t = X_2/X_1$, l'equazione

$$5X_1^2 + 6X_1X_2 + X_2^2 = 0$$

diventa

$$t^2 + 6t + 5 = 0$$

che si fattorizza in

$$(t+1)(t+5) = 0.$$

Pertanto, il precedente sistema si fattorizza in:

$$r: \quad X_1 + X_2 = X_1 - X_3 = 0$$

e

$$s: \quad X_2 + 5X_1 = X_1 - X_3 = 0.$$

In definitiva, la conica sezione $\mathcal{C}$ e' una conica semplicemente degenere costituita dalle due rette r e s incidenti nell'origine e contenute in Σ.
(iv) In effetti dal punto (i), Σ e' doppiamente rigata, quindi r appartiene alla prima schiera di Σ e s appartiene alla seconda schiera di Σ.

Il fatto che la conica $\mathcal{C}$ si spezzi in queste due rette discende direttamente dal fatto che α e' manifestamente il piano tangente a Σ nell'origine. Questo si dimostra o calcolando esplicitamente le derivate parziali del polinomio che definisce Σ, valutate in O, oppure basta osservare che l'equazione di Σ ha la parte lineare che e' $X_1 - X_3$; pertanto, poiche' lo sviluppo con il polinomio di Taylor attorno ad O fornisce un polinomio che coincide con l'equazione di Σ, questo comporta che l'annullamento dei termini lineari dell'equazione di Σ, i.e. $X_1 - X_3 = 0$, coincide con la varieta' lineare che "meglio"' approssima la quadrica Σ in O, i.e. il suo piano tangente.