Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile e Edile-Architettura) - a.a. 2010/2011
I Emisemestre
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Classificare dal punto di vista metrico la conica $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana, $X_1^2 + X_2^2 - 4X_1 - 6X_2 = 3$, individuando la sua forma canonica metrica.
Svolgimento: Non è necessario applicare l'algoritmo di riduzione a forma canonica metrica delle coniche. Nei casi in cui i polinomi non sono troppo complicati, con opportuni artifici si può determinare semplicemente la classificazione metrica delle coniche. Oppure, si possono studiare i ranghi ed i determinanti delle varie matrici simmetriche associate. Nel caso in esame, è facile accorgersi che l'equazione data si può scrivere in forma

$$(X_1 - 2)^2 + (X_2 - 3)^2 = 16$$

che è quindi una circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e raggio 4. Considerando il cambiamento di coordinate

$$Y_1 := X_1 - 2, \quad Y_2 = X_2 - 3$$

dato da una traslazione, l'equazione della conica diventa

$$Y_1^2 + Y_2^2 = 16$$

e quindi

$$\frac{Y_1^2}{16} + \frac{Y_2^2}{16} = 1.$$

Pertanto, la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ è quella di un'ellisse generale a punti reali, i.e. di tipo (1), con $a = b = 4$, come dev'essere dato che abbiamo già detto essere una circonferenza.

Esercizio 2: Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $7X_1^2 - 10\sqrt{3}X_1X_2 - 3X_2^2 + 12\sqrt{3}X_1 - 12X_2 - 12 = 0$.
(i) Ridurre la conica $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica $\mathcal{M}$. Stabilire quindi la classificazione metrica di $\mathcal{C}$ e determinare l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$.

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti di $\mathcal{C}$.

Svolgimento: (i) La matrice simmetrica associata alla forma quadratica della conica $\mathcal{C}$ è la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

Poiché $det\ A = -96 < 0$, allora sicuramente $\mathcal{C}$ sarà un'iperbole. Denotata con T un'indeterminata, il polinomio caratteristico di A è

$$det\ (A - TI) = T^2 - 4T - 96$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 12 \quad \lambda_2 = -8.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base $M = M_{e\ f}$ è quindi

$$M := \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente una matrice ortogonale, essendo e ed f ambedue basi ortonormali. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{3}/2y_1 + 1/2y_2, \quad x_2 = -1/2y_1 + \sqrt{3}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$12Y_1^2 - 8Y_2^2 + 24Y_1 - 12 = 0,$$

dato che $\overline{f}_1$ era l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 12$, mentre $\overline{f}_2$ è quello relativo a $\lambda_2 = -8$. Dividendo tutta l'equazione per 4, studiamo quindi la conica

$$\mathcal{C}' : 3Y_1^2 - 2Y_2^2 + 6Y_1 - 3 = 0.$$

Poiché il coefficiente di Y_2 è nullo, consideriamo la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $\overline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, con α da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di $\mathcal{C}'$ si ottiene

$$3Z_1^2 - 2Z_2^2 + 6(1+\alpha)Z_1 + 3\alpha^2 + 6\alpha - 3 = 0.$$

Scegliendo $\alpha = -1$ allora l'equazione della conica diventa

$$3Z_1^2 - 2Z_2^2 = 6$$

e quindi $\overline{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dividendo tutto per 6, si ottiene che $\mathcal{C}$ è un'iperbole generale a punti reali e che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) è

$$\mathcal{M} : \quad Z_1^2/2 - Z_2^2/3 = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$ è data da

$$\overline{x} = M(\overline{z} + \overline{c}) = M\overline{z} + M\overline{c}.$$

Visto che $M\overline{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, le formule dell'isometria sono

$$x_1 = \sqrt{3}/2z_1 + 1/2z_2 - \sqrt{3}/2, \quad x_2 = -1/2z_1 + \sqrt{3}/2z_2 + 1/2.$$

(ii) Gli asintoti della forma canonica $\mathcal{M}$ sono le rette di equazioni cartesiane

$$\sqrt{3}Z_1 - \sqrt{2}Z_2 = 0, \quad \sqrt{3}Z_1 + \sqrt{2}Z_2 = 0$$

il centro di simmetria è l'origine di questo riferimento, l'asse di simmetria intersecato da $\mathcal{M}$ è $Z_2 = 0$ mentre l'asse di simmetria non intersecato da $\mathcal{M}$ è $Z_1 = 0$.
Dalle formule $\overline{x} = M\overline{z} + M\overline{c}$, troviamo che il centro di simmetria di $\mathcal{C}$ è quindi $\overline{x} = M\overline{c} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, che si ottiene per il valore di $\overline{z} = \overline{0}$. Sempre dalla relazione precedente e ricordando che M è una matrice ortogonale, si ottiene la relazione inversa

$$\overline{z} = {}^tM\overline{x} - \overline{c}$$

cioè
$$z_1 = \sqrt{3}/2x_1 - 1/2x_2 + 1, \quad z_2 = 1/2x_1 + \sqrt{3}/2x_2.$$
Pertanto, i due asintoti di $\mathcal{C}$ sono, rispettivamente,
$$(3-\sqrt{2})X_1 - (\sqrt{3}+\sqrt{6})X_2 + 2\sqrt{3} = 0, \quad (3+\sqrt{2})X_1 + (\sqrt{6}-\sqrt{3})X_2 + 2\sqrt{3} = 0.$$
Analogamente, l'asse di simmetria che non viene intersecato da $\mathcal{C}$ è
$$\sqrt{3}X_1 - X_2 + 2 = 0,$$
mentre quello che viene intersecato da C è
$$X_1 + \sqrt{3}X_2 = 0.$$
In questo modo, grazie alle proprietà geometriche note di $\mathcal{M}$ ed alla isometria che scaturisce dall'algoritmo di riduzione a forma canonica metrica, conosciamo tutti i dati geometrici necessari per poter disegnare senza problemi la conica $\mathcal{C}$ nel riferimento originario (x_1, x_2).

Esercizio 3: È data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2 + 6X_1 - 12X_2 + 9 = 0$. Ridurre la conica $\mathcal{C}$ a forma canonica metrica $\mathcal{M}$. Stabilire la classificazione metrica di $\mathcal{C}$ e determinare esplicitamente l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$.
Svolgimento: La matrice simmetrica associata alla forma quadratica della conica C è la matrice
$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Poiché $det\ A = 0$, allora sicuramente $\mathcal{C}$ apparterrà alla famiglia delle parabole. Il polinomio caratteristico di A è
$$det\ (A - TI) = T(T-5),$$
dove T un'indeterminata. Gli autovalori di A forniscono quindi, grazie al Teorema Spettrale, la seguente trasformazione di coordinate
$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$
Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa
$$\mathcal{C}' : \;\; 5Y_2^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}Y_2 + 9 = 0.$$

Poiché il coefficiente di Y_1 è nullo, consideriamo la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$, con β da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di $\mathcal{C}'$ si ottiene che con $\beta = 3/\sqrt{5}$ l'equazione della conica diventa

$$5Z_2^2 = 0.$$

Dividendo tutto per 5, si ottiene che in tale riferimento $\mathcal{C}$ ha equazione cartesiana della sua forma

$$Z_2^2 = 0.$$

Deduciamo allora che $\mathcal{C}$ è una parabola doppiamente degenere. Però questa equazione non è la forma canonica metrica, come nella tipologia (9) della tabella fondamentale per la classificazione metrica delle coniche. Per averla basterà considerare uno scambio di coordinate (che è determinata da un'isometria lineare di $\mathbb{R}^2$). In altre parole, poniamo $\overline{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{W} = B\overline{W}$, che determina quindi

$$Z_1 = W_2, \qquad Z_2 = W_1.$$

In tali coordinate, otteniamo quindi che l'equazione della forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ è esattamente $W_1^2 = 0$.
Componendo tutte le trasformazioni di coordinate utilizzate:

$$\overline{x} = M\overline{y}, \;\; \overline{y} = \overline{z} + \overline{c}, \;\; \overline{z} = B\overline{w},$$

otteniamo che l'isometria che porta $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica $\mathcal{M}$ è

$$x_1 = -1/\sqrt{5}w_1 + 2/\sqrt{5}w_2 - 3/5, \quad x_2 = +2/\sqrt{5}w_1 + 1/\sqrt{5}w_2 + 6/5;$$

in particolare, utilizzando l'isometria inversa troviamo che $\mathcal{C}$ è la retta

$$X_1 - 2X_2 - 3 = 0$$

contata due volte.

Esercizio 4: Classificare dal punto di vista affine la conica $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana $X_1^2 + 2X_2^2 = 0$, determinando esplicitamente il cambiamento di coordinate che la porta nella sua forma canonica affine.

Svolgimento: Anche in questo caso, possiamo evitare di applicare l'algoritmo di riduzione a forma canonica affine. Infatti, poiché la somma eguagliata a zero è una somma di due quadrati, essa è pertanto una conica puntiforme, cioè supportata solo nell'origine. Considerando le sostituzioni

$$Y_1 = X_1 \quad \text{e} \quad Y_2 = \sqrt{2}\, X_2,$$

dettate dall'affinità di equazioni

$$\overline{Y} = A\overline{X}$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

si ha la forma canonica affine di $\mathcal{C}$ che è, ovviamente,

$$Y_1^2 + Y_2^2 = 0.$$

Esercizio 5. Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $X_1^2 - X_1X_2 + X_2^2 - 4X_1 - 3 = 0$.
(i) Classificare $\mathcal{C}$.
(ii) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica $\mathcal{M}$, trovando esplicitamente l'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$.
(iii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti della conica $\mathcal{C}$.
(iv) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica affine $\mathcal{A}$, trovando esplicitamente l'affinità che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{A}$.
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha determinante diverso da zero. Pertanto $\mathcal{C}$ è una conica generale. La matrice simmetrica della forma quadratica associata alla conica è la sottomatrice $\widetilde{A}(2,3;2,3)$ che è di determinante $3/4$. Pertanto $\mathcal{C}$ è sicuramente un'ellisse.
Dall'equazione di $\mathcal{C}$, notiamo che il suo supporto contiene il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Pertanto, dalla classificazione delle ellissi generali, necessariamente deve contenere infiniti punti reali, i.e. è un'ellisse generale a punti reali.

(ii) Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica associata alla forma quadratica di $\mathcal{C}$ è

$$det(\widetilde{A}(2,3;2,3) - TI) = T^2 - 2T + \frac{3}{4}$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 1/2 \qquad \lambda_2 = 3/2.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $\widetilde{A}(2,3;2,3)$ è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente ortogonale. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano la forma quadratica $\mathcal{Q}(X_1, X_2)$ associata all'equazione di $\mathcal{C}$, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$Y_1^2 + 3Y_2^2 - 2\sqrt{2}Y_1 + 2\sqrt{2}Y_2 - 6 = 0.$$

Consideriamo ora la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $\overline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con α e β da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione di $\mathcal{C}'$ si ottiene

$$Z_1^2 + 3Z_2^2 + 2(\alpha - \sqrt{2})Z_1 + 2(3\beta + \sqrt{2})Z_2 + \alpha^2 + 3\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2\sqrt{2}\beta - 6 = 0.$$

Scegliendo $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = -\sqrt{2}/3$, si ottiene

$$Z_1^2 + 3Z_2^2 = 10,$$

e quindi $\overline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$. Dividendo tutto per 10, ritroviamo che $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale a punti reali dato che l'equazione della sua forma canonica metrica nel riferimento (z_1, z_2) è

$$\mathcal{M}: \quad \frac{Z_1^2}{10} + \frac{Z_2^2}{10/3} = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{M}$ è data da

$$\overline{x} = M(\overline{z} + \overline{c}) = M\overline{z} + M\overline{c}.$$

Visto che $M\overline{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, le formule per questa isometria sono

$$x_1 = \sqrt{2}/2 z_1 - \sqrt{2}/2 z_2 + 4/3, \quad x_2 = \sqrt{2}/2 z_1 + \sqrt{2}/2 z_2 + 2/3.$$

(iii) $\mathcal{M}$ ha centro di simmetria l'origine di questo riferimento, e gli asse di simmetria gli assi coordinati. Nelle coordinate del riferimento iniziale, il centro di simmetria di $\mathcal{C}$ si ottiene per $\overline{z} = \overline{0}$, pertanto tale centro è $M\overline{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. L'isometria inversa è $\overline{z} = {}^t M\overline{x} - \overline{c}$, i.e.

$$z_1 = \sqrt{2}/2 x_1 + \sqrt{2}/2 x_2 - \sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{2}/2 x_1 + \sqrt{2}/2 x_2 + \sqrt{2}/3.$$

Pertanto, l'asse di simmetria $Z_1 = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 + X_2 = 2$$

mentre l'asse di simmetria $Z_2 = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 - X_2 = 2/3.$$

Per eventualmente disegnare $\mathcal{C}$ con precisione, si potrebbero trovare le intersezioni con gli assi di simmetria: questi non sono altro che i punti ottenuti per trasformazione, mediante l'isometria $\overline{x} = M\overline{z} + M\overline{c}$, dei punti di intersezione di $\mathcal{M}$ con gli assi coordinati $Z_1 = 0$ e $Z_2 = 0$.

(iv) Per trovare la forma canonica affine di $\mathcal{C}$, consideriamo la forma canonica metrica $\mathcal{M}$ ed applichiamo il procedimento di Sylvester alla forma quadratica associata all'equazione di $\mathcal{M}$. Se prendiamo in base di Sylvester indeterminate W_1 e W_2, otteniamo la trasformazione

$$Z_1 = \sqrt{10}\, W_1, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{10}{3}}\, W_2.$$

Con tale trasformazione, la forma canonica metrica $\mathcal{M}$ si trasforma in

$$\mathcal{A}: \;\; W_1^2 + W_2^2 = 1,$$

come doveva essere data la classificazione di $\mathcal{C}$. Prendiamo

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10/3} \end{pmatrix}$$

la matrice di questo cambiamento di coordinate. Poiché $\overline{z} = S\overline{w}$, dall'equazione vettoriale dell'isometria precedentemente trovata abbiamo $\overline{x} = MA\overline{w} + M\overline{c}$.
Calcolando il prodotto tra matrici, otteniamo che

$$MA = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi le formule per l'affinità sono:

$$x_1 = \sqrt{5}w_1 - \sqrt{5}/3w_2 + 4/3, \quad x_2 = \sqrt{5}w_1 + \sqrt{5}/3w_2 + 2/3.$$

Esercizio 5. Sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $\frac{1}{2}X_1^2 - X_1X_2 + \frac{1}{2}X_2^2 - \frac{7}{\sqrt{2}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}X_2 + 7 = 0$.
(i) Classificare $\mathcal{C}$.
(ii) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica $\mathcal{M}$. Determinare inoltre tutte le isometrie coinvolte in tale riduzione, stabilendo che tipo di isometrie sono.
(iii) Scrivere le equazioni cartesiane degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria o dell'eventuale vertice.
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Poichè $det\ \widetilde{A} = -\frac{9}{4} \neq 0$ e $det\ (\widetilde{A}(2,3;2,3)) = 0$, la conica $\mathcal{C}$ è sicuramente una parabola generale.

(ii) Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica associata alla forma quadratica di $\mathcal{C}$ è

$$det\ (\widetilde{A}(2,3;2,3) - TI) = T(T-1)$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 0 \ \text{ e } \ \lambda_2 = 1.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di $\widetilde{A}(2,3;2,3)$ è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente ortogonale (non speciale). La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano la forma quadratica $\mathcal{Q}(X_1, X_2)$ associata all'equazione di $\mathcal{C}$, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$Y_2^2 - 3Y_1 - 4Y_2 + 7 = 0.$$

Consideriamo ora la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $\overline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con α e β da determinare opportunamente con le solite tecniche. Si determina

$$\alpha = -1, \ \ \beta = -2,$$

e l'equazione di $\mathcal{C}'$ diventa, nel riferimento (z_1, z_2):

$$\mathcal{C}'' : \quad Z_2^2 = 3Z_1.$$

Facendo ora la sostituzione di indeterminate

$$Z_1 = W_2, \quad Z_2 = W_1,$$

dettata dall'isometria lineare

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{w},$$

si ottiene

$$\mathcal{C}''' : \quad W_1^2 = 3W_2,$$

e quindi la forma canonica metrica richiesta è

$$\mathcal{M} : \quad \frac{1}{3}\, W_1^2 = W_2.$$

La prima isometria considerata è l'isometria

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

che è un'isometria lineare inversa. Precisamente è una riflessione le cui formule sono state descritte precedentemente, i.e.

$$x_1 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 - \sqrt{2}/2y_2.$$

La seconda isometria è ovviamente una traslazione, data da

$$y_1 = z_1 - 1, \quad y_2 = z_2 - 2.$$

La terza isometria

$$\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{w}$$

è anch'essa un'isometria lineare inversa data dalla riflessione rispetto alla retta vettoriale $Z_1 = Z_2$.

(iii) La forma canonica metrica $\mathcal{M}$ ha vertice nell'origine del riferimento (z_1, z_2) ed asse di simmetria l'asse $Z_1 = 0$. Pertanto, nelle coordinate del riferimento iniziale, il vertice di $\mathcal{C}$ è

$$V = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

mentre l'asse di simmetria $Z_1 = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$X_1 - X_2 = 2\sqrt{2}.$$

Esercizio 6. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2)$, si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$X_1^2 - 2X_1X_2 + X_2^2 - 7\sqrt{2}X_1 + \sqrt{2}X_2 + 14 = 0.$$

(i) Classificare $\mathcal{C}$.
(ii) Scrivere la forma canonica metrica $P(Z_1, Z_2) = 0$ di $\mathcal{C}$, determinando il riferimento cartesiano ortonormale $RC(O'; z_1, z_2)$ in cui $\mathcal{C}$ assume tale equazione e l'isometria tra i due riferimenti $RC(O; x_1, x_2)$ e $RC(O'; z_1, z_2)$.
(iv) Disegnare $\mathcal{C}$ nel riferimento iniziale $RC(O; x_1, x_2)$.
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 14 & -\frac{7\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{7\sqrt{2}}{2} & 1 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo $det(\widetilde{A}) \neq 0$. Pertanto $\mathcal{C}$ e' una conica generale.
La matrice simmetrica associata alla forma quadratica della conica C è la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $det(A) = 0$, allora $\mathcal{C}$ una parabola generale.
(ii) Il polinomio caratteristico di A è

$$det\ (A - TI) = T(T - 1),$$

dove T un'indeterminata. Poiche' la forma canonica metrica di una parabola generale e', in opportune coordinate,

$$Z_2 = aZ_1^2$$

per un qualche $a \in \mathbb{R}^+$, questo significa che si deve annullare il coefficiente di Z_2^2. In altre parole conviene scegliere come primo autovettore $\overline{f}_1$ della nuova base ortonormale di $\mathbb{R}^2$, l'autovettore relativo all'autovalore 1 e come secondo quello relativo all'autovalore 0.

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base $M = M_{e\ f}$ è quindi

$$M := \left(\begin{array}{cc} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{array} \right).$$

che è ovviamente ortogonale. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = -\sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2y_1 + \sqrt{2}/2y_2.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$P(Y_1, Y_2) = Y_1^2 + 4Y_1 - 3Y_2 + 7 = 0,$$

dato che $\overline{f}_1$ era l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 1$, mentre $\overline{f}_2$ è quello relativo a $\lambda_2 = 0$.
consideriamo la traslazione

$$\overline{y} = \overline{z} + \overline{c}$$

dove $\overline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e $\overline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con α e β da determinare opportunamente. Sostituendo nella equazione $P(Y_1, Y_2) = 0$ si ottiene

$$P(Z_1, Z_2) = Z_1^2 - 3Z_2 + Z_1(2\alpha + 4) + \alpha^2 + 4\alpha - 3\beta + 7 = 0.$$

Annulliamo il coefficiente del termine lineare in Z_1, determinando

$$\alpha = -2.$$

Pertanto si ottiene

$$P(Z_1, Z_2) = Z_1^2 - 3Z_2 + 3 - 3\beta = 0.$$

Annullando anche il termine noto, si determina

$$\beta = 1.$$

In definitiva il polinomio si riduce a

$$P(Z_1, Z_2) = Z_1^2 - 3Z_2 = 0.$$

Ne segue che la traslazione si ha per

$$\overline{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ e'

$$Z_2 = \frac{1}{3} Z_1^2.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica e' data da

$$\overline{x} = M(\overline{z} + \overline{c}) = M\overline{z} + M\overline{c}.$$

Visto che $M\overline{c} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$, le formule dell'isometria sono

$$x_1 = -\sqrt{2}/2 z_1 + \sqrt{2}/2 z_2 + (3\sqrt{2})/2, \quad x_2 = \sqrt{2}/2 z_1 + \sqrt{2}/2 z_2 - \sqrt{2}/2.$$

Nel riferimento $RC(O', z_1, z_2)$ il vertice di $\mathcal{C}$ e' l'origine di questo riferimento, i.e. $\overline{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Invece l'asse di simmetria e' la retta di equazione $Z_1 = 0$. Segue che, nel riferimento di partenza $RC(O; x_1, x_2)$, il vertice di $\mathcal{C}$ e'

$$M\overline{c} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Per trovare invece l'equazione dell'asse della parabola, consideriamo l'isometria inversa

$$\overline{z} = {}^tM\overline{x} - \overline{c}$$

che fornisce

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 + 2, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} x_2 - 1.$$

Pertanto, l'asse di $\mathcal{C}$ ha equazione

$$X_1 - X_2 - 2\sqrt{2} = 0.$$

(iii) Per disegnare per bene $\mathcal{C}$ basta calcolare le coordinate di un altro punto di $\mathcal{C}$. Ad esempio, il punto che nel riferimento $RC(O', z_1, z_2)$ ha coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

in $RC(O, x_1, x_2)$ diventa il punto di coordinate

$$\begin{pmatrix} \frac{7\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2)$, si considerino le coniche $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana

$$X_1X_2 + X_1 + X_2 + 1 = 0,$$

e $\mathcal{D}$, di equazione cartesiana

$$X_1^2 + 3X_1X_2 - 2X_1 = 0.$$

(i) Stabilire se esiste un'affinita' di $\mathbb{R}^2$ che trasformi $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$, motivando tutte le asserzioni fatte.
(ii) Stabilire se esiste un'isometria di $\mathbb{R}^2$ che trasformi $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$, motivando tutte le asserzioni fatte.
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo $\det(\widetilde{A}) = 0$ e $\det(A) = -1/4 < 0$. Pertanto $\mathcal{C}$ e' un'iperbole semplicemente degenere.

Per la conica $\mathcal{D}$, basta osservare che essa si scrive come

$$X_1(X_1 + 3X_2 - 2) = 0;$$

pertanto anche questa e' manifestamente un'iperbole semplicemente degenere. Questo comporta che $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ sono sicuramente affini, dato che la forma canonica affine di un'iperbole semplicemente degenere e' univocamente individuata ed e', in opportune coordinate, $Z_1^2 - Z_2^2 = 0$.

(ii) Le coniche $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ non possono invece essere congruenti. Per giungere a questa conclusione, si puo' applicare l'algoritmo di riduzione a forma canonica metrica sia a $\mathcal{C}$ che a $\mathcal{D}$ e vedere che le forme canoniche metriche vengono differenti. Un metodo piu' rapido e' invece quello di considerare il cosendo dell'angolo formato tra le due rette costituenti sia $\mathcal{C}$ che $\mathcal{D}$.
Per calcolare il coseno dell'angolo θ tra le due rette di $\mathcal{D}$ basta considerare che i due vettori direttori sono $(1,0)$ e $(1,3)$. Pertanto si ha $\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$.
Per determinare i vettori direttori delle due rette che formano $\mathcal{C}$, basta osservare che la forma quadratica associata alla conica e' X_1X_2, pertanto i due assi di simmetria di $\mathcal{C}$ sono necessariamente ortogonali.

Esercizio 8. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale standard $RC(O; x_1, x_2)$, sia data la conica $\mathcal{C}$, di equazione cartesiana

$$X_1^2 + 4X_1X_2 + 3X_2^2 + 2X_1 + 3 = 0.$$

(i) Verificare che $\mathcal{C}$ e' un'iperbole generale.
(ii) Determinare le direzioni degli assi di simmetria di $\mathcal{C}$ di modo che formino una base positivamente orientata di $\mathbb{R}^2$. **[6 punti]**
(iii) Qual'e' l'angolo formato da questi assi di simmetria?
Svolgimento: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo $\det(\widetilde{A}) \neq 0$ e $\det(A) = -1 < 0$. Pertanto $\mathcal{C}$ e' un'iperbole generale.
(ii) Il polinomio caratteristico della forma quadratica associata a $\mathcal{C}$ e' $P(T) = T^2 - 4T - 1$ che ha come soluzioni $2 \pm \sqrt{5}$.

Un generatore $\overline{v}$ dell'autospazio $V_{2+\sqrt{5}}$ sara' la direzione di uno dei due assi di simmetria. L'autospazio si determina risolvendo il sistema lineare

$$(3+\sqrt{5})X_1 + 2X_2 = 0 = 2X_1 + (5+\sqrt{5})X_2$$

che fornisce $\overline{v} = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}$. Per il teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, l'altro autovettore (e quindi la direzione dell'altro asse di simmetria) e' necessariamente

ortogonale a $\overline{v}$. Per avere una base positivamente orientata allora prenderemo come generatore $\begin{pmatrix} -2 \\ 3+\sqrt{5} \end{pmatrix}$
(iii) La risposta e' $\theta = \pi/2$ come discende direttamente dal fatto che A e' autoaggiunto e che i due autovalori di A erano distinti.