

Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia) - a.a. 2010/2011

I Semestre

Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Sia $\bar{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore e sia $r_0 := \text{Lin}\{\bar{v}\}$ la corrispondente retta vettoriale orientata.

(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{\pi/2, r_0}$ di angolo $\pi/2$ attorno alla retta vettoriale orientata r_0 ;

(ii) Sia ℓ la retta di equazioni parametriche

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calcolare le equazioni parametriche della retta che si ottiene applicando $R_{\pi/2, \bar{v}}$ a ℓ .

Svolgimento: (i) Una base ortogonale di \mathbb{R}^3 avente \bar{v} come primo vettore della base e', ad esempio

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Per renderla ortonormale, basta dividere ogni vettore per la sua norma (le coordinate le scriviamo per comodita' per riga):

$$\bar{e}'_1 = \frac{\bar{f}_1}{\|\bar{f}_1\|} = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), \quad \bar{e}'_2 = \frac{\bar{f}_2}{\|\bar{f}_2\|} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),$$

e

$$\bar{e}'_3 = \frac{\bar{f}_3}{\|\bar{f}_3\|} = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}).$$

La rotazione di angolo $\pi/2$ attorno ad \vec{e}'_1 , espressa in tale nuova base ortonormale, ha matrice rappresentativa standard:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base dalla base canonica alla base $\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ e' la matrice M che ha per colonne le coordinate dei vettori di tale nuova base espressi in base canonica. Quindi, la matrice rappresentativa di $R_{\pi/2, \vec{v}}$, espressa rispetto alla base canonica, e' la matrice A data da

$$A = MA'M^{-1} = MA'M^t,$$

dato che M e' una matrice ortogonale. Percio'

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Le equazioni parametriche cercate si ottengono, ad esempio, applicando la matrice A al punto generico della retta ℓ , che e' $(1 + 2t, -1 + t, t)$, con $t \in \mathbb{R}$ (scritto per riga per brevit ). Si ottiene quindi

$$\bar{x} = (-\sqrt{3}/3, -\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3) + t(4/3, (4 - \sqrt{3})/3, (4 + \sqrt{3})/3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Un modo equivalente per trovare le equazioni parametriche della nuova retta era anche il seguente: si prendono 2 punti qualsiasi P e Q di ℓ , si considerano i trasformati di tali due punti mediante $R_{\pi/2, r_0}$, i.e. $A(P)$ e $A(Q)$, e infine si determina l'equazione parametrica della retta passante per i due punti $A(P)$ e $A(Q)$.

Esercizio 2: Sia $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ un vettore e sia $r_0 := \text{Lin}\{\vec{v}\}$ la corrispondente retta

vettoriale orientata.

(i) Trovare le formule per la rotazione $R_{-\pi/4, r_0}$ di un angolo $-\pi/4$ attorno alla retta orientata r_0 ;

(ii) Sia Π il piano di equazione cartesiana

$$X_1 + X_2 = 7.$$

Calcolare le equazioni parametriche del piano che si ottiene applicando $R_{-\pi/4, r_0}$ a Π .

Svolgimento: (i) Nella base $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ determinata nell'esercizio precedente, la rotazione di angolo $-\pi/4$ attorno ad \bar{e}'_1 ha, rispetto a tale base ortonormale, matrice rappresentativa

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Perciò, rispetto alla base canonica, la matrice rappresentativa è

$$B = MB'M^t = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6} & \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

(ii) Basta prendere tre punti distinti e non allineati, $P, Q, T \in \Pi$, determinare i tre punti trasformati $P' = B(P)$, $Q' = B(Q)$ e $T' = B(T)$, e poi calcolare le equazioni parametriche del piano Π' per questi nuovi tre punti.

Esercizio 3: Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 sia l la retta di equazioni parametriche

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Scrivere le formule di rotazione $R_{\frac{\pi}{2}, \bar{v}}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno alla retta vettoriale orientata

generata dal vettore $\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(ii) Calcolare le equazioni parametriche della retta $m = R_{\frac{\pi}{2}, \bar{v}}(l)$.

Svolgimento: (i) Sia $b = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ una base ortonormale di \mathbb{R}^3 positivamente orientata e con $\bar{f}_1 = \bar{v}/\|\bar{v}\|$. Perciò

$$\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{f}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

In base b , la matrice di rotazione $R_{\pi/2}$ e' :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Percio', se M e' la matrice cambiamento di base dalla base canonica e alla base b , allora M e' una matrice ortogonale e la matrice della rotazione $R_{\pi/2, \bar{v}}$ in base e e' :

$$A = M\tilde{A}M^t = \begin{pmatrix} 1/3 & (1 - \sqrt{3})/3 & (1 + \sqrt{3})/3 \\ 1/3 & 1/3 & -\sqrt{3}/3 \\ (1 - \sqrt{3})/3 & (1 + \sqrt{3})/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(ii) La retta m ha equazioni parametriche

$$A \begin{pmatrix} 1 + t \\ 3t \\ 1 + t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 4: Sia K il cubo in \mathbb{R}^3 di vertici:

$$(1, 1, 1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1), (-1, -1, 1), \\ (1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, -1).$$

- (i) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2, \bar{e}_3}$;
- (ii) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2, \bar{e}_1}$;
- (iii) Disegnare l'immagine di K dopo la rotazione $R_{\pi/2, -\bar{e}_1}$;
- (iv) Quali rotazioni mandano il cubo in se stesso?

Svolgimento: (i) La rotazione $R_{\pi/2, \bar{e}_3}$; e' :

$$R_{\pi/2, \bar{e}_3}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2, x_1, x_3),$$

percio' K viene mandato in se stesso.

- (ii) Stessa conclusione come nel punto (i);
- (iii) La rotazione $R_{\pi/2, -\bar{e}_1}$; e' esattamente come la rotazione $R_{-\pi/2, \bar{e}_1}$. Analoga conclusione come in (i) ed in (ii).
- (iv) Se K viene mandato in se stesso, allora l'asse della rotazione e' uno dei seguenti:
 - (a) retta congiungente i centri di due facce opposte;
 - (b) retta congiungente i punti medi di due spigoli opposti;

(c) retta congiungente 2 vertici opposti.

Le rotazioni di tipo (a) sono di angoli $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le rotazioni di tipo (b) devono mandare devono mandare gli spigoli che questo asse interseca in se stessi, perciò sono rotazioni di angolo $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Infine, le rotazioni di tipo (c) devono mandare i 3 lati uscenti da uno dei 2 vertici in loro stessi, cioè i tre spigoli devono essere permutati fra loro. Perciò è una rotazione di angolo $\frac{2k\pi}{3}$.

Esercizio 5: Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 sia π il piano di equazione cartesiana

$$X_1 + X_2 = 1$$

e sia r la retta di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 = 0 \\ X_2 + X_3 = 1 \end{cases}.$$

Riflettere la retta r rispetto al piano π , calcolando esplicitamente le equazioni parametriche della retta $S_\pi(r)$ che è la retta riflessa di r rispetto a π .

Svolgimento: Le coordinate di $P := \pi \cap r$ sono le soluzioni del sistema lineare di 3 equazioni e 3 incognite che si ottiene mettendo a sistema le equazioni cartesiane che definiscono π e r . Si ottiene $P = (-1/2, 3/2, -1/2)$. Un secondo punto sulla retta r è ad esempio $Q = (-1, 1, 0)$.

La retta n che passa per Q e che è ortogonale a π ha equazione parametrica:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Il punto di intersezione $n \cap \pi$ corrisponde al valore del parametro $t = 1/2$. Il riflesso Q' di Q rispetto a π corrisponde quindi a $t = 1$, ed abbiamo quindi $Q' = (0, 2, 0)$.

Poiché la riflessione rispetto a π lascia fisso P , la retta cercata è la retta che passa per P e per Q' , che ha pertanto equazioni parametriche:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Esercizio 6 Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 , con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O, \mathcal{E})$ e con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) , sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione cartesiana:

$$\pi : 2X_1 - X_2 + X_3 = 4.$$

- (i) Scrivere le formule di riflessione rispetto al piano π .
 (ii) Determinare le equazioni cartesiane della retta $m \subset \mathbb{R}^3$, ottenuta per riflessione della retta l :
$$\begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 - 1 = 0 \end{cases}$$
 rispetto al piano π .

Svolgimento: (i) Sia $p = (a, b, c)$ il punto generico di \mathbb{R}^3 . Un vettore normale al piano π e' il vettore $\bar{n} = (2, -1, 1)$. Pertanto la retta r , passante per p e perpendicolare a π , ha equazione parametrica vettoriale

$$\bar{x} = \bar{p} + t\bar{n},$$

e quindi equazioni parametriche scalari

$$X_1 = a + 2t, \quad X_2 = b - t, \quad X_3 = c + t.$$

Se imponiamo l'intersezione di r con π , si ottiene il valore

$$t_0 = (4 + b - c - 2a)/6.$$

Quindi, se $S_\pi(p)$ denota il simmetrico di p rispetto a π , esso si ottiene come punto sulla retta r , corrispondente al valore del parametro $2t_0$, cioe'

$$S_\pi(p) = (a, b, c) + ((4 + b - c - 2a)/3) (2, -1, 1).$$

In definitiva, le formule di simmetria rispetto a π sono

$$S_\pi((a, b, c)) = (-a/3 + 2b/3 - 2c/3 + 8/3, 2a/3 + 2b/3 + c/3 - 4/3, -2a/3 + b/3 + 2c/3 + 4/3).$$

- (ii) Prendiamo due punti su l , ad esempio $R = (1, 0, 1)$ e $Q = (0, -1, -1)$. Dalle formule di simmetria precedenti, si ha che

$$S_\pi(R) = (5/3, -1/3, 4/3) \quad S_\pi(Q) = (8/3, -7/3, 5/3).$$

Percio', un vettore direttore di m e' dato da

$$S_\pi(Q) - S_\pi(R) = (1, -2, -1).$$

Allora, l'equazione parametrica vettoriale di m e' data da $\bar{x} = (5/3, -1/3, 4/3) + t(1, -2, -1)$ e quindi le equazioni parametriche scalari sono

$$X_1 = 5/3 + t, \quad X_2 = -1/3 - 2t, \quad X_3 = 4/3 - t.$$

Queste determinano le equazioni cartesiane di m che sono, ad esempio

$$m: \quad X_1 + X_3 - 3 = 0 = X_2 - 2X_3 + 3 = 0.$$

Esercizio 7. Nello spazio cartesiano \mathbb{R}^3 , con riferimento cartesiano ortonormale standard e con coordinate cartesiane (x_1, x_2, x_3) , sia data la sfera \mathcal{S} di equazione cartesiana

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 4X_1 + 2X_2 - x_3 + 1 = 0.$$

Determinare le coordinate del centro C ed il raggio r della sfera.

Svolgimento: Se $C = (\alpha, \beta, \gamma)$ e' il centro di \mathcal{S} , ricordiamo che un'equazione cartesiana di \mathcal{S} e' anche

$$(X_1 - \alpha)^2 + (X_2 - \beta)^2 + (X_3 - \gamma)^2 = r^2.$$

Sviluppando tutti i quadrati ed eguagliando coefficiente per coefficiente con l'equazione data di \mathcal{S} nel testo dell'esercizio, otteniamo

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad r = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

Esercizio 8. Trovare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il piano

$$\alpha: X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0$$

risulti, rispettivamente, secante, tangente o esterno alla sfera \mathcal{S} , di equazione cartesiana:

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2X_1 - 4X_2 + 1 = 0.$$

Svolgimento: Il piano α risulta secante, tangente o esterno a \mathcal{S} a seconda che la distanza dal centro della sfera \mathcal{S} al piano α risulti rispettivamente minore, uguale o maggiore del raggio di \mathcal{S} .

Come in uno degli esercizi precedenti, troviamo che il centro C di \mathcal{S} e'

$$C := (1, 2, 0);$$

il raggio e' invece

$$r = 2.$$

Si ha

$$d(C, \alpha) = \frac{|5+k|}{\sqrt{6}}.$$

Pertanto, α risulta:

- secante \mathcal{S} se $\frac{|5+k|}{\sqrt{6}} < 2$, i.e.

$$-2\sqrt{6} - 5 < k < 2\sqrt{6} - 5;$$

- tangente a \mathcal{S} se $\frac{|5+k|}{\sqrt{6}} = 2$, i.e.

$$k = \pm 2\sqrt{6} - 5;$$

in altre parole, nel fascio di piani paralleli di equazione cartesiana $X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0$, con k parametro variabile, esistono 2 distinti piani tangenti alla sfera \mathcal{S} , ovviamente in due punti distinti su \mathcal{S} ;

- esterno a \mathcal{S} per $k > 2\sqrt{6} - 5$ oppure $k < -2\sqrt{6} - 5$.

Esercizio 9. Sia data la forma quadratica di ordine 2

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2.$$

(i) Determinare un'isometria che fornisca coordinate (y_1, y_2) su \mathbb{R}^2 rispetto alle quali la forma quadratica Q risulti diagonale.

(ii) Stabilire il rango e la segnatura di Q .

Svolgimento: La matrice simmetrica $A = A_Q$ associata a Q nelle coordinate (x_1, x_2) e' la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Poiche' $\det(A) = 0$, allora sicuramente A non avra' rango massimo. In altre parole $rg(A) \leq 1$. Visto che l'unica matrice di rango 0 e' la matrice identicamente nulla, allora $rg(A) = 1$.

Pertanto, visto che la nozione di rango di una forma quadratica Q e' indipendente dalla scelta della base di \mathbb{R}^2 , equivalentemente della matrice simmetrica che la rappresenta, possiamo gia' concludere che

$$rg(Q) = 1.$$

Il polinomio caratteristico di A e'

$$\det(A - tI) = t(t - 5).$$

Gli autovalori di A sono

$$0 \text{ e } 5.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, tali autovalori forniscono la seguente base ortonormale di \mathbb{R}^2 costituita da autovettori di A :

$$\mathbf{f}_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad \mathbf{f}_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Se consideriamo sullo spazio vettoriale euclideo \mathbb{R}^2 , munito di questa nuova base ortonormale f , coordinate (y_1, y_2) relative alla base f allora, dalle varie conseguenze del teorema Spettrale, si ha che in tali coordinate Q diventa

$$Q(Y_1, Y_2) = 0Y_1^2 + 5Y_2^2 = 5Y_2^2.$$

Poiche' nel testo dell'esercizio e' richiesto esplicitamente di trovare la trasformazione (isometria lineare) di coordinate di \mathbb{R}^2 che diagonalizza Q , allora osserviamo che i versori della base f formano la matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice determina la trasformazione di coordinate

$$\bar{x} = M\bar{y},$$

cioe'

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

In effetti, facendo queste sostituzioni nel polinomio iniziale

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 4X_2^2 - 4X_1X_2$$

e svolgendo tutti i conti, si ottiene effettivamente

$$Q(Y_1, Y_2) = 5Y_2^2,$$

che e' ulteriore verifica (superflua!) di quanto asserito precedentemente.

(ii) Avevamo gia' riscontrato che il rango di Q era 1. Visto che l'unico autovalore non nullo di Q e' 5, che e' positivo, e visto che la nozione di segnatura di una forma quadratica e' indipendente dalla scelta della base, deduciamo che la segnatura di Q e' $(1, 0)$.

Esercizio 10. In \mathbb{R}^3 si consideri fissato il vettore

$$\mathbf{u}_0 = (1, 2, 1).$$

Sia T l'operatore lineare di \mathbb{R}^3 , definito da

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

- (i) Stabilire se T e' un operatore autoaggiunto;
 (ii) Scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica e ; confrontare il risultato con quanto risposto in (i).

Svolgimento: (i) T non e' autoaggiunto. Infatti, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, ricordando le proprieta' del prodotto vettoriale, si ha che

$$\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, (-\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}_0) \rangle = \langle \mathbf{x}, (-T(\mathbf{y})) \rangle.$$

Poiche' un operatore coincide con il suo opposto se e solo se e' l'operatore nullo, si ha pertanto $T \neq -T$ (dato che T e' manifestamente un operatore non-identicamente nullo). Percio' T non puo' essere autoaggiunto.

(ii) Per calcolare la matrice A di T rispetto alla base canonica, basta vedere le immagini $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$, dei tre vettori della base canonica. Per definizione di T , basta calcolare i tre prodotti vettoriali

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{u}_0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Si ha

$$T(\mathbf{e}_1) = (0, -1, 2), \quad T(\mathbf{e}_2) = (1, 0, -1), \quad T(\mathbf{e}_3) = (-2, 1, 0).$$

Percio' la matrice A ha per i -esima colonna il vettore $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Manifestamente si vede che la matrice A non e' una matrice simmetrica. Poiche' la matrice A e' espressa utilizzando una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard che esiste su \mathbb{R}^3 , allora possiamo anche in questo modo concludere che T non puo' essere un operatore autoaggiunto, come abbiamo dedotto in modo intrinseco al punto (i).

Esercizio 11. Sia T l'operatore autoaggiunto di \mathbb{R}^4 definito, rispetto alla base canonica e , dalla matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Scrivere l'equazione della forma quadratica Q associata a T .

(ii) Utilizzando il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A determinando la base ortonormale di autovettori di A in cui Q risulta essere una forma quadratica diagonale.

(iii) Determinare esplicitamente la segnatura di Q .

Svolgimento: (i) La matrice della forma quadratica Q coincide con A . Quindi Q ha equazione:

$$Q(X_1, X_2, X_3, X_4) = X_1^2 - X_2^2 + 2X_3X_4.$$

(ii) Il polinomio caratteristico di A è

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Quindi A ha due autovalori, i.e. 1 e -1 , ambedue di molteplicità algebrica 2 . Denotati con V_1 e V_{-1} i rispettivi autospazi, troviamo che

$$V_1 = \text{Span}\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}, \quad V_{-1} = \text{Span}\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$$

poiché le equazioni cartesiane per V_1 sono

$$X_2 = X_3 - X_4 = 0,$$

mentre quelle per V_{-1} sono

$$X_1 = X_3 + X_4 = 0.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, per diagonalizzare A basta considerare una base ortonormale di autovettori di A .

Sappiamo che i due autospazi V_1 e V_{-1} sono già fra di loro ortogonali, poiché sono autospazi relativi ad autovalori distinti. Osserviamo inoltre che i generatori di V_1 (rispettivamente di V_{-1}) sono due vettori ortogonali. Perciò per determinare una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori di A , basta normalizzare i 4 vettori trovati. Otteniamo che la base voluta è

$$f := \{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}.$$

Dalla teoria generale, in tale base, la matrice A diventa congruente alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cioe' alla matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A , nell'ordine relativo alla scelta dell'ordinamento dei vettori della base f , ciascun autovalore ripetuto tante volte quanto e' la sua molteplicita' algebrica (equivalentemente geometrica). Questo significa che la forma quadratica Q in tale base ha, rispetto alle opportune coordinate, equazione

$$Q(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = Y_1^2 + Y_2^2 - Y_3^2 - Y_4^2.$$

(iii) La segnatura di Q e' ovviamente $(2, -2)$, come si deduceva gia' dal segno degli autovalori di A .

Esercizio 12. Stabilire rango, segnatura e forma diagonale della seguente forma quadratica

$$Q(X_1, X_2) = 3X_1^2 - 2X_1X_2 + 3X_2^2.$$

Svolgimento: Sia

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

la matrice simmetrica associata a Q . Essa ha autovalori

$$2 \text{ e } 4.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, in opportune coordinate (y_1, y_2) di \mathbb{R}^2 , l'equazione di Q diventa

$$2Y_1^2 + 4Y_2^2.$$

Pertanto Q ha rango 2 e segnatura $(2, 0)$.

Esercizio 13: Stabilire rango, segnatura e forma diagonale della seguente forma quadratica

$$Q(X_1, X_2) = X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2.$$

Svolgimento: La matrice della parte omogenea di grado 2 della conica e'

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

percio' Q ha rango 1. L'autovalore non nullo di A e' 2. Pertanto la segnatura di Q e' $(1, 0)$ ed, in opportune coordinate (y_1, y_2) , la forma diagonale e' ad esempio

$$Q(Y_1, Y_2) = 2Y_1^2.$$