

**Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria**  
**Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia) - a.a. 2010/2011**

**I Semestre**

**Docente: Prof. F. Flamini**

**Esercizi Riepilogativi Svolti**

**Esercizio 1:** Si consideri  $\mathbb{R}^3$  come spazio cartesiano, con riferimento cartesiano standard  $(O; x_1, x_2, x_3)$ . Determinare l'equazione cartesiana del piano  $\pi$ , passante per il punto

$P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , parallelo alla retta  $r$ , di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - 3X_3 = 1 \\ X_2 + X_3 = 3 \end{cases},$$

e perpendicolare al piano  $\alpha$  di equazione cartesiana

$$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 = 1.$$

Scrivere infine l'equazione cartesiana di una qualsiasi retta che sia sghemba alla retta  $s$  di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 1 \end{cases}.$$

**Svolgimento:** (i) Dall'equazione di  $U$ , abbiamo che una base di  $U$  e' ad esempio

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due vettori sono gia' ortogonali. Pertanto, basta considerare

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il terzo versore della base ortonormale positivamente orientata sarà dato da

$$\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) Il piano richiesto deve contenere nella sua giacitura un vettore direttore di  $r$  ed un vettore normale al piano  $\alpha$ . Pertanto, detto  $\underline{v}$  un vettore direttore di  $r$  e  $\underline{n}$  un vettore normale a  $\alpha$ , un vettore normale a  $\pi$  è il vettore

$$\underline{n}' = \underline{v} \wedge \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di  $\pi$  è della forma

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 + k = 0.$$

Il passaggio per  $P$  fornisce l'equazione

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 - 13 = 0.$$

Per determinare una qualsiasi retta sghemba a  $s$ , prendiamo un qualsiasi piano parallelo ad esempio a  $X_1 - X_3 = 1$ , sia questo ad esempio

$$X_1 - X_2 = 2.$$

In seguito, consideriamo un piano non parallelo a  $X_1 + X_2 + X_3 = 1$  e che non contenga  $s$ , ad esempio  $X_3 = 1$ . Infatti, mettendo a sistema le equazioni cartesiane di  $s$  con  $X_3 = 1$  troviamo un unico punto di intersezione, pertanto  $X_3 = 1$  non contiene  $s$ . In definitiva, la retta data da

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 2 \\ X_3 = 1 \end{cases},$$

è sicuramente sghemba a  $s$ , dato che essa non è parallela a  $s$  ed è contenuta in un piano parallelo ad uno dei due che determinano  $s$ .

**Esercizio 2:** Siano assegnati nello spazio cartesiano  $\mathbb{R}^3$  la retta

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{ed il piano } \Pi : x_1 + x_3 = 0.$$

Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche della retta  $r'$  che e' proiezione ortogonale di  $r$  sul piano  $\Pi$ .

**Svolgimento:** La retta  $r'$  sara' determinata dall'intersezione di  $\Pi$  con  $\Gamma$ , dove  $\Gamma$  e' il piano contenente la retta  $r$  e perpendicolare a  $\Pi$ , i.e.  $r' = \Pi \cap \Gamma$ . Sia  $\Gamma$  questo piano incognito da determinare, la cui equazione cartesiana sara' della forma

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Poiche'  $\Gamma$  deve contenere la retta  $r$ , che e' una retta passante per l'origine, allora anche  $\Gamma$  passa per l'origine. Quindi  $d = 0$ . Pertanto l'equazione si trasforma in

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Inoltre,  $\Gamma$  deve contenere tutti i punti di  $r$ , che sono della forma  $P = (-2t, -2t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Pertanto deve valere la relazione

$$-2at - 2bt + ct = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

quindi

$$-2a - 2b + c = 0.$$

D'altra parte,  $\Gamma$  deve essere perpendicolare a  $\Pi$ . Quindi la giacitura di  $\Gamma$  (che coincide con  $\Gamma$  stesso, dato che e' un piano per l'origine) deve contenere un vettore normale a  $\Pi$ . Un vettore normale a  $\Pi$  e' il vettore  $\underline{n} = (1, 0, 1)$ . Pertanto, vale anche la relazione

$$a + c = 0.$$

In definitiva, dal sistema lineare

$$-2a - 2b + c = a + c = 0$$

troviamo soluzioni

$$c = -a \quad e \quad b = -\frac{3}{2}a.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

troviamo

$$ax_1 - \frac{3}{2}ax_2 - ax_3 = 0.$$

Poiche' l'equazione di un piano e' definita a meno di proporzionalita', il piano  $\Gamma$  ha equazione cartesiana:

$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

Percio', la retta  $r'$  ha equazioni cartesiane:

$$r' : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases} .$$

Risolvendo ora il sistema lineare non omogeneo che fornisce le equazioni cartesiane per  $r'$ , troviamo le equazioni parametriche di  $r'$ , che sono:  $(x_1, x_2, x_3) = (2t, -2t, 5t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Esercizio 3:** Sono assegnate la retta

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{ed il piano } \Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

(i) Determinare il piano  $\Lambda$  contenente  $r$  ed ortogonale a  $\Pi$ ;

(ii) Determinare la retta  $s$ , proiezione ortogonale di  $r$  su  $\Pi$ ;

**Svolgimento:** (i) Si ragiona esattamente come nell'esercizio precedente. Il piano  $\Pi$  ha vettore normale  $\underline{n} = (1, 2, -1)$ . Percio' il piano  $\Lambda$  ha equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

(ii) La retta  $s$  e' l'intersezione di  $\Pi$  con  $\Lambda$ , percio':

$$s : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \end{cases} .$$

**Esercizio 4:** Nello spazio cartesiano  $\mathbb{R}^3$  sia data la retta  $r$  di equazioni cartesiane

$$r : x_1 - x_2 = x_3 - 1 = 0.$$

Determinare tutte le rette  $s$ , aventi vettore direttore

$$(1, 0, -1)$$

e tali che

$$d(r, s) = 1.$$

Stabilire inoltre se queste rette sono in numero finito oppure se sono infinite.

**Svolgimento:** Una retta  $s$  siffatta e' della forma

$$x_2 - b = x_1 + x_3 - a - c = 0,$$

dove  $(a, b, c)$  e' il generico punto dello spazio.

Imporre che una tale  $s$  sia a distanza 1 da  $r$  determina

$$a - b + c = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Sostituendo tale eguaglianza nella equazione precedente, si ottengono 2 famiglie di rette:

$$s_b : x_2 - b = x_1 - x_2 + x_3 - 1 + \sqrt{3} = 0$$

e

$$s'_b : x_2 - b = x_1 - x_2 + x_3 - 1 - \sqrt{3} = 0.$$

Ciascuno di essi e' un fascio di rette parallele nel piano opportuno dato dalla seconda equazione.

**Esercizio 5:** Si consideri  $\mathbb{R}^3$  come spazio cartesiano, con riferimento standard  $(O; x_1, x_2, x_3)$ .

Siano date la retta  $r$ , passante per il punto  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e con vettore direttore  $\underline{v} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , e la retta  $s$ , di equazioni cartesiane

$$X_1 - 2 = 2X_2 - X_3 - 2 = 0.$$

- (i) Verificare che  $r$  e  $s$  sono rette sghembe.
- (ii) Determinare un'equazione cartesiana del piano  $\pi$  contenente  $r$  e parallelo a  $s$ .
- (iii) Prendere un punto  $Q$  qualsiasi su  $s$  e calcolare la distanza di  $Q$  da  $\pi$  (equivalentemente, calcolare la *distanza tra le due rette sghembe*)

**Svolgimento:** (i) La retta  $s$  ha giacitura data dal sistema omogeneo

$$X_1 = 2X_2 - X_3 = 0.$$

Pertanto, risolvendo tale sistema, vediamo che  $s$  ha come vettore direttore il vettore  $\bar{w}$  di coordinate (scritte per comodita' per riga)  $(0, 1, 2)$ . Poichè i due vettori direttori non sono proporzionali, si deduce che le rette  $r$  e  $s$  non sono parallele.

Se non fossero sghembe, poiché non sono coincidenti, allora dovrebbero intersecarsi in un solo punto. I punti della retta  $r$  hanno coordinate

$$(1 + t, -1 - t, 1 + t)$$

al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$ . Sostituire queste coordinate variabili nelle equazioni che definiscono  $s$  equivale a cercare il valore di  $t$  per cui si ha l'eventuale intersezione tra  $r$  e  $s$ . Seguendo tale procedimento, si ottiene il sistema di equazioni lineari nel parametro  $t$ :

$$t - 1 = 3t + 5 = 0$$

che è manifestamente incompatibile. Quindi  $r \cap s = \emptyset$ ; pertanto le due rette sono sghembe.

(ii) Il piano richiesto deve contenere nella sua giacitura i vettori direttori di  $r$  e di  $s$ . Inoltre, deve anche contenere un punto di  $r$ . Un vettore normale a  $\pi$  è il vettore

$$\underline{n} = \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di  $\pi$  è della forma

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0.$$

Il passaggio per  $P$  fornisce l'equazione

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 = 0.$$

(iii) Prendiamo ad esempio il punto  $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  su  $s$ . Pertanto

$$d(Q, \pi) = \frac{|6 + 2|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{4}{7}\sqrt{14}.$$

**Esercizio 6:** Nello spazio cartesiano  $\mathbb{R}^3$ , sia dato il piano  $\pi$  di equazione cartesiana  $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$  ed un suo punto  $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Trovare l'equazione del fascio di rette proprio contenuto nel piano  $\pi$  e di centro  $P$ .

**Svolgimento.** Prendiamo una retta  $s$  passante per  $P$  ma non contenuta nel piano dato; per esempio

$$\begin{cases} X_1 = 1 + t \\ X_2 = 5 - 2t \\ X_3 = 1 + t \end{cases} .$$

Tale retta non è parallela a  $\pi$ . Inoltre essa è incidente a  $\pi$  nel punto  $P$ . Le sue equazioni cartesiane sono:

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + 2X_3 - 7 = 0 \end{cases} .$$

Il fascio di piani di asse la retta  $s$  ha equazione

$$\lambda X_1 + \mu X_2 + (2\mu - \lambda)X_3 - 7\mu = 0.$$

L'equazione del fascio cercato è quindi:

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0 \\ \lambda X_1 + \mu X_2 + (2\mu - \lambda)X_3 - 7\mu = 0 \end{cases} .$$