Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia) - a.a. 2010/2011
I Semestre
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Determinare tutte le rette passanti per $P = (-1, 2)$ e formanti con l'asse x_1 un angolo convesso pari a $\pi/3$. Determinare i due angoli convessi fra le due rette ottenute.

Svolgimento: Sia $\underline{r} = (l, m)$ un vettore direttore di una delle rette da determinare. Allora:

$$\frac{1}{2} = cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\underline{r} \cdot (\pm \underline{e}_1)}{||\underline{r}|| \, ||\underline{e}_1||} = \frac{\pm l}{\sqrt{l^2 + m^2}},$$

che determina

$$l = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} m.$$

Otteniamo percio', a meno di proporzionalita', due vettori direttori:

$$\underline{r}_1 = (1, \sqrt{3}) \text{ e } \underline{r}_2 = (-1, \sqrt{3}).$$

Le equazioni cartesiane delle rette cercate sono:

$$r_1 : \sqrt{3}x_1 - x_2 + 2 + \sqrt{3} = 0 \text{ e } r_2 : \sqrt{3}x_1 + x_2 - 2 + \sqrt{3} = 0.$$

Ora

$$cos(\theta(r_1, r_2)) = cos(\theta(\pm \underline{r}_1, \underline{r}_2)) = \pm \frac{1}{2},$$

quindi $\theta = \{\pi/3, 2\pi/3\}$.

Esercizio 2: Siano assegnate le rette:

$$\underline{s}_1 : \begin{cases} x_1 = & 1 - 2t \\ x_2 = & 2t, \; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\underline{s}_2 : x_1 - 2x_2 + 1 = 0 \text{ e } \underline{s}_3 : 2x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

(i) Determinare un'equazione cartesiana di $\underline{s}_1$;
(ii) Determinare un'equazione cartesiana della retta $\underline{r}$ parallela ad $\underline{s}_1$ e passante per $P_0 = \underline{s}_2 \cap \underline{s}_3$;

(iii) Determinare l'equazione cartesiana della retta $\underline{n}$ per $P_1 = \underline{s}_1 \cap \underline{s}_2$ e perpendicolare a $\underline{s}_3$;
(iv) Verificare che la retta per i punti

$$Q_1 = (1, -1/4) \; e \; Q_2 = (2, 1/4)$$

e' parallela a $\underline{s}_2$. Tale retta coincide con $\underline{s}_2$?
Svolgimento: (i) Poiche' $x_2 = 2t$, un' equazione cartesiana e' $x_1 = 1 - x_2$, cioe' $x_1 + x_2 - 1 = 0$.
(ii) Per determinare il punto P_0 basta risolvere il sistema lineare non omogeneo

$$x_1 - 2x_2 + 1 = 2x_1 + x_2 - 2 = 0$$

che ha come soluzione

$$x_1 = 3/5, \; x_2 = 4/5.$$

Un vettore direttore della retta $\underline{s}_1$ e' $(-2, 2)$, equivalentemente $(-1, 1)$. Quindi, l'equazione cartesiana della retta che si vuole determinare sara' data da:

$$x_1 + x_2 - \frac{7}{5} = 0.$$

(iii) Per trovare le coordinate di P_1, basta sostituire nell'equazione di $\underline{s}_2$, $x_1 = 1 - 2t$ e $x_2 = 2t$, che determina $t = 1/3$, cioe' $x_1 = 1/3, \; x_2 = 2/3$. Un vettore normale a $\underline{s}_3$ e' $(2, 1)$, come si determina direttamente dalla sua equazione cartesiana. Percio' la retta cercata e' quella che passa per P_1 e che ha parametri direttori $(2, 1)$, cioe':

$$x_1 - 2x_2 + 1 = 0.$$

(iv) Un vettore direttore della retta per Q_1 e Q_2 e' dato dal vettore $OQ_2 - OQ_1 = (1, 1/2)$. Quindi, un vettore direttore e' anche $(2, 1)$, che e' un vettore direttore anche di $\underline{s}_2$. Ora pero' la retta per Q_1 e Q_2 e' parallella a $\underline{s}_2$ ma non coincide con $\underline{s}_2$ perche', ad esempio, le coordinate di Q_1 non soddisfano l'equazione di $\underline{s}_2$.
Esercizio 3: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ sono dati i tre punti non allineati di coordinate, rispetto ad e,:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \; P_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \; P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si considerino tali punti come vertici di un triangolo Λ.
(i) Il punto Q che e' intersezione delle tre altezze del triangolo Λ viene detto l'*ortocentro* del triangolo Λ. Calcolare le coordinate dell'ortocentro di Λ.

(ii) Determinare l'area di Λ.

Svolgimento: (i) Un vettore direttore della retta per P_1 e P_2 e' dato da $P_2 - P_1 = (4, -2)$. Analogamente, un vettore direttore della retta per P_2 e P_3 e' $(-1, 1)$ e per P_1 e P_3 e' $(3, -1)$. Ora dobbiamo considerare, per ogni $1 \leq i \neq j \neq k \leq 3$, la retta per P_i e perpendicolare alla retta per P_j e P_k. Le equazioni di queste tre rette sono

$$x_1 - x_2 + 3 = 0, \quad 3x_1 - x_2 - 9 = 0, \quad 2x_1 - x_2 - 3 = 0.$$

Risolvendo il sistema fra due di queste tre rette troviamo il punto di coordinate $x_1 = 6$ e $x_2 = 9$. Poiche' tale punto appartiene pure alla terza retta, allora queste sono proprio le coordinate dell'ortocentro.

(ii) Il segmento P_1P_2 misura $2\sqrt{5}$. La retta per P_1 e P_2 ha equazioni parametriche

$$x_1 = -1 + 4t, x_2 = 2 - 2t$$

mentre la retta per P_3 e perpendicolare ad essa ha equazioni parametriche

$$x_1 = 2 + 2s, x_2 = 1 + 4s.$$

Il punto di intersezione di tali due rette e' il punto H di coordinate $(9/5, 3/5)$, che corrisponde al punto sulla seconda retta relativo al valore del parametro $s = -1/10$. L'altezza di Λ relativa al cateto P_1P_2 e' quindi il segmento P_3H che misura $\sqrt{5}/5$. Percio', l'area di Λ e' $a(\Lambda) = 1$.

Esercizio 4: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, siano assegnati i punti

$$P = (1, 2), \ Q = (2, -1), \ R = (1, 0),$$

le cui coordinate sono scritte per comodita' per riga.

Trovare il punto Q' simmetrico di Q rispetto a P e la retta $\underline{r}$ simmetrica rispetto a P della retta $\underline{r}_{RQ}$.

Svolgimento. Il punto Q' e' il punto, diverso da Q, che giace sulla retta per P e Q e che' e' a distanza pari a $d(P, Q)$ da P. La retta $\underline{r}$ e' la retta parallela alla retta per R e Q e che passa per Q' trovato precedentemente.

Esercizio 7: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x_1, x_2)$, sia data la retta ℓ di equazione cartesiana $X_1 + X_2 - 4 - \sqrt{2} = 0$.

(i) Scrivere l'equazione del fascio (proprio) di rette di centro $Q = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e determinare l'unica retta del fascio parallela a ℓ.
(ii) Data l'affinita'

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

disegnare nel piano $f(\ell)$.
Svolgimento. (i) L'equazione del fascio di rette e' $\lambda(X_1 - 4) + \mu(X_2 - 3) = 0$, cioe' $\lambda X_1 + \mu X_2 - 4\lambda + 3\mu = 0$. La condizione di parallelismo con ℓ fornisce che $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ deve essere proporzionale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, i.e. $\lambda = \mu$, che determina $X_1 + X_2 - 7 = 0$.
(ii) Basta vedere come si trasforma un punto di ℓ mediante le formule di affinita' completa e come si trasfroma il vettore direttore di ℓ con la parte lineare delle formule dell'affinita'.