Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile-Architettura e dell'Edilizia) - a.a. 2010/2011
I Emisemestre
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Consideriamo nello spazio affine $\mathbb{R}^4$, con riferimento cartesiano (O, e), i due sottoinsiemi:
• $L_1 := \{(1+\alpha+\beta, 2+\alpha, 3+\beta, 4) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$,
• $L_2 := \{(4, 3, 2, \gamma+1) \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$.
Verificare che L_1 e L_2 sono varietà lineari di $\mathbb{R}^4$ e determinare la loro mutua posizione in $\mathbb{R}^4$.
Svolgimento. Notiamo che gli elementi di L_1 sono della forma

$$(1, 2, 3, 4) +_a (\alpha+\beta, \alpha, \beta, 0) = (1, 2, 3, 4) +_a (\alpha(1, 1, 0, 0) + \beta(1, 0, 1, 0)).$$

Pertanto, posto

$$P_1 := (1, 2, 3, 4)$$

e

$$W_1 := Lin(\overline{v}_1, \overline{w}_1),$$

dove

$$\overline{v}_1 = (1, 1, 0, 0) \quad \text{e} \quad \overline{w}_1 = (1, 0, 1, 0)$$

notiamo immediatamente che L_1 è la varietà lineare di $\mathbb{R}^4$ passante per P_1 e parallela al sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato da W_1 (i.e., con giacitura W_1). Poichè $dim\ W_1 = 2$, L_1 è un piano in $\mathbb{R}^4$.
Analogamente per L_2 troviamo che essa è la varietà lineare passante per il punto

$$P_2 = (4, 3, 2, 1)$$

e parallela alla retta vettoriale $W_2 = Lin((0, 0, 0, 1)) = Lin(\overline{e}_4)$.
Notiamo che $L_1 \cap L_2 = \emptyset$: infatti, ponendo

$$(1+\alpha+\beta, 2+\alpha, 3+\beta, 4) = (4, 3, 2, \gamma+1)$$

si ottiene un sistema di 4 equazioni nelle tre incognite α, β e γ:

$$\begin{cases} \alpha+\beta &= 3 \\ \alpha &= 1 \\ \beta &= -1 \\ \gamma &= 3 \end{cases}$$

che è manifestamente incompatibile.
Ora, poichè $\overline{v}_1$, $\overline{w}_1$ ed $\overline{e}_4$, sono tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$, allora W_2 non è sottospazio vettoriale di W_1. Pertanto L_1 e L_2 non sono varietà lineari parallele. Quindi il piano L_1 e la retta L_2 sono sghembi in $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, siano date le due coppie di punti

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } Q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare equazioni parametriche delle rette

$$\mathcal{L}_1 : \langle P_1, P_2 \rangle \ \text{ e } \ \mathcal{M}_1 : \langle Q_1, Q_2 \rangle$$

(ii) Verificare che l'affinita' lineare data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

trasforma la retta $\mathcal{L}_1$ nella retta $\mathcal{M}_1$. (iii) Determinare gli eventuali punti fissi dell'affinita' f.
Svolgimento. (i) $\mathcal{L}_1$ e' la retta passante per P_1 e con vettore direttore $\overline{v} = P_2 -_a P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; pertanto le sue equazioni parametriche sono

$$X_1 = 1 + t,\ X_2 = 1 - t,\ X_3 = 1 + 2t,\ t \in \mathbb{R}^*.$$

Analogamente $\mathcal{M}_1$ e' la retta passante per Q_1 e con vettore direttore $\overline{v}' = Q_2 -_a Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; pertanto le sue equazioni parametriche sono

$$X_1 = 1 + 2t,\ X_2 = 2 + 2t,\ X_3 = 3t,\ t \in \mathbb{R}^*.$$

(ii) E' facile verificare che

$$f(P_i) = Q_i,\ 1 \leq i \leq 2.$$

Quindi l'affinita' lineare trasforma fra loro anche le varieta' lineari generate da questi punti.
(iii) I punti fissi dell'affinita' lineare sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano la relazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

in altri termini, l'eventuale luogo di punti fissi di f e' determinato dall'autospazio di A relativo all'autovalore 1. In effetti 1 e' autovalore di A e la sua molteplicita' algebrica e geometrica e' 1. In effetti, l'autospazio e' dato da

$$X_2 = X_3 = 0$$

che e' l'asse delle ascisse.

Esercizio 3: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, siano assegnati i punti

$$P = (1, 2),\ Q = (2, -1),\ R = (1, 0),$$

le cui coordinate sono scritte per comodita' per riga. Dopo aver verificato che i 3 punti formano i vertici di un triangolo $\mathcal{T}$, determinare il perimetro del triangolo $\mathcal{T}$.
Svolgimento: I tre punti non sono allineati. Quindi formano i vertici di un triangolo. Per trovare il perimetro basta determinare le lunghezze di tutti e tre i lati con la formula della distanza fra due punti e poi sommare.

Esercizio 4: Nello spazio affine $\mathbb{R}^3$, con riferimento (O, e), siano date
(i) la retta r passante per il punto P, di coordinate $(1, -1, 1)$, e parallela al vettore $\overline{v}$, di componenti rispetto ad e $(1, -1, 1)$, e

(ii) la retta s, definita dal sistema di equazioni $X_1 - 2 = 2X_2 - X_3 - 2 = 0$.
Stabilire se r e s sono rette sghembe.
Svolgimento. La retta s ha giacitura data dal sistema omogeneo

$$X_1 = 2X_2 - X_3 = 0.$$

Pertanto, risolvendo tale sistema, vediamo che la giacitura di s è il vettore $\overline{w}$, di componenti rispetto ad e, $(0, 1, 2)$. Poichè le due giaciture non sono proporzionali, si deduce che le rette r e s non sono parallele. Se non fossero sghembe, allora dovrebbero intersecarsi in un punto. I punti della retta r sono della forma $P +_a t\overline{v}$, cioè hanno coordinate

$$(1 + t, -1 - t, 1 + t)$$

al variare di t in $\mathbb{R}$. Sostituire queste coordinate variabili nelle equazioni che definiscono s equivale a cercare il valore di t per cui si ha l'eventuale intersezione tra r e s. Seguendo tale procedimento, si ottiene il sistema di equazioni lineari nel parametro t:

$$t - 1 = 3t + 5 = 0$$

che è manifestamente incompatibile. Quindi $r \cap s = \emptyset$; pertanto le due rette sono sghembe.

Esercizio 5: Nel piano affine $\mathbb{R}^2$, con riferimento (O, e), sono assegnati i punti $P = (1, 2)$, $Q = (2, -1)$ e $R = (1, 0)$. Dopo aver verificato che i 3 punti formano i vertici di un triangolo Δ, determinare le coordinate del baricentro B di Δ e le equazioni che descrivano le tre mediane di Δ.
Svolgimento: I punti dati formano i vertici di un triangolo Δ dato che non sono allineati in $\mathbb{R}^2$. Ricordiamo che la mediana di un triangolo è la retta che congiunge un vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto a tale vertice. Calcoliamo i rispettivi punti medi dei lati del triangolo che sono:

$$M_{PQ} = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2}),\ M_{QR} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}),\ M_{PR} = (1, 1).$$

La mediana uscente da P è la retta passante per P e per M_{QR}; equivalentemente è la retta passante per P e con giacitura generata dal vettore $M_{QR} -_a P$, che ha componenti $(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$ e quindi, a meno di proporzionalità, $(1, -5)$. Pertanto, i punti su questa retta hanno coordinate

$$(x_1, x_2) = (1 + t, 2 - 5t)$$

con $t \in \mathbb{R}$ variabile. Considerando le due eguaglianze

$$x_1 = 1 + t, \;\; x_2 = 2 - 5t$$

dalla prima troviamo

$$t = x_1 - 1$$

che sostituita nella seconda fornisce

$$x_2 = 2 - 5(x_1 - 1).$$

Pertanto, un punto (x_1, x_2) è sulla mediana $r_{P,M_{RQ}}$ se, e solo se, le sue coordinate soddisfano la relazione precedente, i.e.

$$5x_1 + x_2 - 7 = 0.$$

Ciò significa che un'equazione lineare che rappresenta tale retta è

$$r_{P,M_{RQ}} : \quad 5X_1 + X_2 - 7 = 0.$$

Ragionando in questo modo anche con le altre mediane, troviamo :

$$r_{R,M_{PQ}} : \quad X_1 - X_2 - 1 = 0$$

e

$$r_{Q,M_{PR}} : \quad 2X_1 + X_2 - 3 = 0.$$

Notiamo che, dalle ben note proprietà di geometria elementare, il baricentro B è l'intersezione delle tre mediane di Δ. Le tre rette trovate effettivamente si interescano tutte e tre nel punto $B = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$, che e' appunto il baricentro.

Esercizio 6: Nel piano affine $\mathbb{R}^2$, con riferimento (O, e), sia dato il triangolo di vertici $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$ e $B = (0, 1)$. Si considerino i parallelogrammi:
- $OABC$, avente OA ed AB per lati ed OB per diagonale, e
- $OADB$, avente OB ed OA per lati ed AB per diagonale.

Sia E il punto di intersezione tra le rette r_{AC} e r_{OD}. Dimostrare che B, E ed il punto medio F del segmento OA sono allineati.
Svolgimento. La retta $r_{A,B}$ ha giacitura generata dal vettore $B -_a A = (-1, 1)$; quindi un'equazione che determina questa giacitura è

$$X_1 + X_2 = 0.$$

Il punto C è l'intersezione delle rette

$$X_1 + X_2 = 0 \text{ e } X_2 = 1$$

quindi $C = (-1, 1)$. Il punto D è l'intersezione delle rette

$$X_1 = 1 \text{ e } X_2 = 1$$

quindi $D = (1, 1)$. La retta per A e C è la retta passante per A e con giacitura generata dal vettore $C_a A$, quindi è

$$X_1 + 2X_2 - 1 = 0.$$

Analogamente, quella per O e D è

$$X_1 - X_2 = 0;$$

quindi, essendo E il punto di intersezione di queste ultime due rette, si ha $E = (1/3, 1/3)$. Infine F, essendo punto medio del segmento OA, ha coordinate $F = (1/2, 0)$. La retta $r_{E,F}$ è quindi

$$2X_1 + X_2 - 1 = 0.$$

Le coordinate di B soddisfano quest'equazione, quindi B appartiene a $r_{E,F}$.

Esercizio 7: Nel piano affine $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano (O, e), è data la retta r rappresentata dall'equazione $X_1 + X_2 = 1$. Determinare tutte le affinità di $\mathbb{R}^2$ che fissano tutti i punti di r e che trasformano il punto $P = (1, 2)$ nel punto $Q = (2, 1)$.
Svolgimento. Sappiamo che i luogo dei punti fissi di un'affinità se non vuoto è per forza una varietà lineare. Allora per avere affinità che fissano tutti i punti di r basta determinare quelle affinità che fissano 2 punti distinti di r. Infatti, poichè l'unione di due punti distinti non è una varietà lineare, se questi restano fissi sotto l'azione di un'affinità f, allora tutti i punti della retta r restano fissi sotto l'azione di f.
Prendiamo allora i due punti $P_1 = (0, 1)$ e $P_2 = (1, 0)$ su r. Un'affinità è della forma

$$f(\overline{x}) = A\,\overline{x} + \overline{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

con A matrice invertibile. Se imponiamo

$$f(P_1) = P_1, \quad f(P_2) = P_2,$$

otteniamo

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}.$$

Si ottiene il sistema di 4 equazioni:

$$a_{12} = a_{11} - 1,\ a_{21} = a_{22} - 1,\ b_1 = 1 - a_{11},\ b_2 = 1 - a_{22}.$$

Quindi, le affinità che fissano tutti i punti di r sono ∞^2 dato che sono della forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} - 1 \\ a_{22} - 1 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 - a_{11}\\1 - a_{22}\end{pmatrix},$$

con $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$ parametri indipendenti, tali che $a_{11} + a_{22} \neq 1$, per la condizione di invertibilità di A.

Ora imponiamo la condizione ulteriore che $f(P) = Q$, che fornisce

$$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} - 1 \\ a_{22} - 1 & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 - a_{11}\\1 - a_{22}\end{pmatrix}.$$

Si determina allora

$$a_{11} = \frac{3}{2}, \quad a_{22} = \frac{1}{2}.$$

Dunque esiste un'unica affinità che soddisfa tutte le condizioni richieste. Le equazioni di tale affinità sono:

$$Y_1 = \frac{1}{2}(3X_1 + X_2 - 1) \;\; Y_2 = \frac{1}{2}(-X_1 + X_2 + 1).$$

Esercizio 8: Siano $\overline{v} = (1, 2)$, $\overline{w} = (-1, -1)$ due vettori del piano vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$. Sia S l'isometria lineare data dalla riflessione rispetto all'asse x_1, i.e. rispetto a $Lin(\overline{e}_1)$. Calcolare $Or(S(\overline{v}), S(\overline{w}))$.

Svolgimento. (i) Osserviamo che

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 = Or(\overline{v},\ \overline{w})$$

perciò la coppia ordinata di vettori è una base per $\mathbb{R}^2$ che, inoltre, è orientata positivamente.

(ii) Riflettere rispetto all'asse x_1 vuol dire che, per ogni vettore $\overline{x} = (x_1, x_2)$, $S(\overline{x}) = (x_1, -x_2)$. Pertanto, l'isometria lineare S è

$$S(\overline{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Denotata con $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice ortogonale dell'isometria S, $det\ M = -1$ cioè S è un'isometria lineare inversa. Pertanto

$$Or(S(\overline{v}), S(\overline{w})) = det(M)\ Or(\overline{v},\ \overline{w}) = -1,$$

i.e. la base

$$b = \ S(\overline{v}), S(\overline{w})$$

non è equiorientata con e.