**Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria**
**Esercizi GEOMETRIA (Edile e Edile-Architettura) - a.a. 2008/2009**
**II Emisemestre - Settimana 5 - Foglio 13**
**Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin**

**Esercizi Riepilogativi Svolti**

**Esercizio 1**: Siano assegnati nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ la retta

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 & = 0, \end{cases} \qquad \text{ed il piano } \ \Pi : x_1 + x_3 = 0.$$

Calcolare le equazioni cartesiane e parametriche della retta $r'$ che e' proiezione ortogonale di $r$ sul piano $\Pi$.

**Svolgimento:** La retta $r'$ sara' determinata dall'intersezione di $\Pi$ con $\Gamma$, dove $\Gamma$ e' il piano contenente la retta $r$ e perpendicolare a $\Pi$, i.e. $r' = \Pi \cap \Gamma$. Sia $\Gamma$ questo piano incognito da determinare, la cui equazione cartesiana sara' della forma

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0.$$

Poiche' $\Gamma$ deve contenere la retta $r$, che e' una retta passante per l'origine, allora anche $\Gamma$ passa per l'origine. Quindi $d = 0$. Pertanto l'equazione si trasforma in

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0.$$

Inoltre, $\Gamma$ deve contenere tutti i punti di $r$, che sono della forma $P = (-2t, -2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Pertanto deve valere la relazione

$$-2at - 2bt + ct = 0, \ \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

quindi

$$-2a - 2b + c = 0.$$

D'altra parte, $\Gamma$ deve essere perpendicolare a $\Pi$. Quindi la giacitura di $\Gamma$ (che coincide con $\Gamma$ stesso, dato che e' un piano per l'origine) deve contenere un vettore normale a $\Pi$. Un vettore normale a $\Pi$ e' il vettore $\underline{n} = (1, 0, 1)$. Pertanto, vale anche la relazione

$$a + c = 0.$$

In definitiva, dal sistema lineare

$$-2a - 2b + c = a + c = 0$$

troviamo soluzioni

$$c = -a \ \text{ e } \ b = -\frac{3}{2}a.$$

Sostituendo nell'equazione di partenza

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0,$$

troviamo

$$ax_1 - \frac{3}{2}ax_2 - ax_3 = 0.$$

Poiche' l'equazione di un piano e' definita a meno di proporzionalita', il piano $\Gamma$ ha equazione cartesiana:

$$2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0.$$

Percio', la retta $r'$ ha equazioni cartesiane:

$$r' : \begin{cases} x_1 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = 0, \end{cases} \quad .$$

Risolvendo ora il sistema lineare non omogeneo che fornisce le equazioni cartesiane per $r'$, troviamo le equazioni parametriche di $r'$, che sono: $(x_1, x_2, x_3) = (2t, -2t, 5t), \ t \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 2**: Sono assegnate la retta

$$r : \begin{cases} x_1 - x_2 & = 1 \\ x_3 & = 0, \end{cases} \quad \text{ed il piano } \ \Pi : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0.$$

(i) Determinare il piano $\Lambda$ contenente $r$ ed ortogonale a $\Pi$;
(ii) Determinare la retta $s$, proiezione ortogonale di $r$ su $\Pi$;
(iii) Determinare l'angolo convesso $\theta(r, s)$ tra $r$ ed $s$;
**Svolgimento:** (i) Si ragiona esattamente come nell'esercizio precedente. Il piano $\Pi$ ha vettore normale $\underline{n} = (1, 2, -1)$. Percio' il piano $\Lambda$ ha equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1.$$

(ii) La retta $s$ e' l'intersezione di $\Pi$ con $\Lambda$, percio':

$$s : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = 0, \end{cases} .$$

(iii) La retta $r$ ha vettore direttore $\underline{r} = (1, 1, 0)$, la retta $s$ ha vettore direttore $\underline{s} = (1, 0, 1)$. Percio',

$$cos(\theta(r, s)) = \pm \frac{\underline{r} \cdot \underline{s}}{||\underline{r}|| ||\underline{s}||} = \pm \frac{1}{2},$$

i.e. $\theta(r, s)$ e' o $\frac{\pi}{3}$ oppure $\frac{2}{3}\pi$, a seconda di come sono orientate le due rette.

**Esercizio 3**: Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$ sia data la retta $r$ di equazioni cartesiane

$$r : x_1 - x_2 = x_3 - 1 = 0.$$

Determinare tutte le rette $s$, aventi vettore direttore

$$(1, 0, -1)$$

e tali che

$$d(r, s) = 1.$$

Stabilire inoltre se queste rette sono in numero finito oppure se sono infinite.
**Svolgimento**: Una retta $s$ siffatta e' della forma

$$x_2 - b = x_1 + x_3 - a - c = 0,$$

dove $(a, b, c)$ e' il generico punto dello spazio.
Imporre che una tale $s$ sia a distanza 1 da $r$ determina

$$a - b + c = 1 \pm \sqrt{3}.$$

Sostituendo tale eguaglianza nella equazione precedente, si ottengono 2 famiglie di rette:

$$s_b : \quad x_2 - b = x_1 - x_2 + x_3 - 1 + \sqrt{3} = 0$$

e

$$s'_b : \quad x_2 - b = x_1 - x_2 + x_3 - 1 - \sqrt{3} = 0.$$

Ciascuno di essi e' un fascio di rette parallele nel piano opportuno dato dalla seconda equazione.

**Esercizio 4** (i) Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale euclideo, munito della base canonica $e$ e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Sia $U$ il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$X_1 - X_3 = 0.$$

Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, positivamente orientata, i cui primi due versori appartengano ad $U$.

(ii) Si consideri ora $\mathbb{R}^3$ come spazio cartesiano, con riferimento cartesiano standard $(O; x_1, x_2, x_3)$. Determinare l'equazione cartesiana del piano $\pi$, passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, parallelo alla retta $r$, di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - 3X_3 & = & 1 \\ X_2 + X_3 & = & 3 \end{cases},$$

e perpendicolare al piano $\alpha$ di equazione cartesiana

$$2X_1 - 3X_2 + 4X_3 = 1.$$

Scrivere infine l'equazione cartesiana di una qualsiasi retta che sia sghemba alla retta $s$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 - X_3 & = & 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 & = & 1 \end{cases}.$$

**Svolgimento:** (i) Dall'equazione di $U$, abbiamo che una base di $U$ e' ad esempio

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due vettori sono gia' ortogonali. Pertanto, basta considerare

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \; \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il terzo versore della base ortonormale positivamente orientata sara' dato da

$$\underline{f}_3 = \underline{f}_1 \wedge \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) Il piano richiesto deve contenere nella sua giacitura un vettore direttore di $r$ ed un vettore normale al piano $\alpha$. Pertanto, detto $\underline{v}$ un vettore direttore di $r$ e $\underline{n}$ un vettore normale a $\alpha$, un vettore normale a $\pi$ e' il vettore

$$\underline{n}' = \underline{v} \wedge \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di $\pi$ e' della forma

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 + k = 0.$$

Il passaggio per $P$ fornisce l'equazione

$$X_1 + 10X_2 + 7X_3 - 13 = 0.$$

Per determinare una qualsiasi retta sghemba a $s$, prendiamo un qualsiasi piano parallelo ad esempio a $X_1 - X_3 = 1$, sia questo ad esempio

$$X_1 - X_2 = 2.$$

In seguito, consideriamo un piano non parallelo a $X_1 + X_2 + X_3 = 1$ e che non contenga $s$, ad esempio $X_3 = 1$. Infatti, mettendo a sistema le equazioni cartesiane di $s$ con $X_3 = 1$ troviamo un unico punto di intersezione, pertanto $X_3 = 1$ non contiene $s$. In definitiva, la retta data da

$$\begin{cases} X_1 - X_3 & = & 2 \\ X_3 & = & 1 \end{cases},$$

e' sicuramente sghemba a $s$, dato che essa non e' parallela a $s$ ed e' contenuta in un piano parallelo ad uno dei due che determinano $s$.

**Esercizio 5.** Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio cartesiano, con riferimento standard $(O; x_1, x_2, x_3)$. Siano date la retta $r$, passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e con vettore direttore $\underline{v} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e la retta $s$, di equazioni cartesiane

$$X_1 - 2 = 2X_2 - X_3 - 2 = 0.$$

(i) Verificare che $r$ e $s$ sono rette sghembe.
(ii) Determinare un'equazione cartesiana del piano $\pi$ contenente $r$ e parallelo a $s$.
(iii) Prendere un punto $Q$ qualsiasi su $s$ e calcolare la distanza di $Q$ da $\pi$ (equivalentemente, calcolare la *distanza tra le due rette sghembe*)
**Svolgimento:** (i) La retta $s$ ha giacitura data dal sistema omogeneo

$$X_1 = 2X_2 - X_3 = 0.$$

Pertanto, risolvendo tale sistema, vediamo che $s$ ha come vettore direttore il vettore $\overline{w}$ di coordinate (scritte per comodita' per riga) $(0, 1, 2)$. Poichè i due vettori direttori non sono proporzionali, si deduce che le rette $r$ e $s$ non sono parallele.

Se non fossero sghembe, poiche' non sono coincidenti, allora dovrebbero intersecarsi in un solo punto. I punti della retta $r$ hanno coordinate

$$(1 + t, -1 - t, 1 + t)$$

al variare di $t$ in $\mathbb{R}$. Sostituire queste coordinate variabili nelle equazioni che definiscono $s$ equivale a cercare il valore di $t$ per cui si ha l'eventuale intersezione tra $r$ e $s$. Seguendo tale procedimento, si ottiene il sistema di equazioni lineari nel parametro $t$:

$$t - 1 = 3t + 5 = 0$$

che è manifestamente incompatibile. Quindi $r \cap s = \emptyset$; pertanto le due rette sono sghembe.
(ii) Il piano richiesto deve contenere nella sua giacitura i vettori direttori di $r$ e di $s$. Inoltre, deve anche contenere un punto di $r$. Un vettore normale a $\pi$ e' il vettore

$$\underline{n} = \underline{v} \wedge \underline{w} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, l'equazione cartesiana di $\pi$ e' della forma

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 + k = 0.$$

Il passaggio per $P$ fornisce l'equazione

$$3X_1 + 2X_2 - X_3 = 0.$$

(iii) Prendiamo ad esempio il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ su $s$. Pertanto

$$d(Q, \pi) = \frac{|6+2|}{\sqrt{9+4+1}} = \frac{4}{7}\sqrt{14}.$$

**Esercizio 6.** Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, sia dato il piano $\pi$ di equazione cartesiana $2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0$ ed un suo punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trovare l'equazione del fascio di rette proprio contenuto nel piano $\pi$ e di centro $P$.

**Svolgimento**. Prendiamo una retta $s$ passante per $P$ ma non contenuta nel piano dato; per esempio

$$\begin{cases} X_1 = & 1 + t \\ X_2 = & 5 - 2t \\ X_3 = & 1 + t \end{cases}.$$

Tale retta non è parallela a $\pi$. Inoltre essa è incidente a $\pi$ nel punto $P$. Le sue equazioni cartesiane sono:

$$\begin{cases} X_1 - X_3 = 0 \\ X_2 + 2X_3 - 7 = 0 \end{cases}.$$

Il fascio di piani di asse la retta $s$ ha equazione

$$\lambda X_1 + \mu X_2 + (2\mu - \lambda)X_3 - 7\mu = 0.$$

L'equazione del fascio cercato è quindi:

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + 3X_3 = 0 \\ \lambda X_1 + \mu X_2 + (2\mu - \lambda)X_3 - 7\mu = 0 \end{cases}.$$