Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile e Edile-Architettura) - a.a. 2008/2009
II Emisemestre - Settimana 3 - Foglio 12
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1: Siano r_1 ed r_2 due rette passanti ambedue per il punto $p_0 = (2, -1)$ e rispettivamente per $q_1 = (18/5, 1/5)$ la prima e per $q_2 = (2, 1)$ la seconda. Assumiamo che tali rette siano tangenti ad una circonferenza $\mathcal{C}$ rispettivamente in q_1 ed in q_2.
(i) Determinare il centro C, il raggio r e l'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$;
(ii) Disegnare la circonferenza $\mathcal{C}$.
Svolgimento: (i) Denotiamo con n_i la retta perependicolare alla retta r_i e passante per il punto q_i, $1 \leq i \leq 2$. Allora, il centro C sara' determinato dall'intersezione $n_1 \cap n_2$ mentre il raggio sara' dato dalla distanza $d(C, q_i)$, per uno qualsiasi dei due punti q_i, $1 \leq i \leq 2$.

Un vettore direttore di r_1 e' $(4, 3)$, percio' la retta n_1 ha equazione cartesiana $4x_1 + 3x_2 - 15 = 0$. Un vettore direttore di r_2 e' $(0, 1)$, percio' la retta n_2 ha equazione cartesiana $x_2 - 1 = 0$. Allora $C = (3, 1)$ mentre $r = d(C, q_1) = d(C, q_2) = 1$.

L'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ e' data da $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$, cioe':

$$x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 + 9 = 0.$$

(ii) Per disegnare la circonferenza, basta considerare C e r.

Esercizio 2: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ sono dati i tre punti non allineati di coordinate:

$$P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare l'equazione cartesiana dell'unica circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i tre punti dati.
(ii) Disegnare la circonferenza $\mathcal{C}$.
(iii) Determinare l'equazione cartesiana della retta tangente a $\mathcal{C}$ nel punto $P \in \mathcal{C}$.
Svolgimento: (i) Il centro della circonferenza da determinare e' il punto C intersezione degli assi delle due corde $\overline{PQ}$ e $\overline{QR}$. Percio', il punto medio di $\overline{PQ}$ e' $M_{PQ} =$

$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, mentre il punto medio di $\overline{QR}$ e' $M_{QR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Invece, la direzione del vettore $\vec{PQ} = (-1, 1)$, mentre la direzione del vettore $\vec{QR} = (0, -3) = (0, -1)$.

Quindi, l'asse del segmento $\overline{PQ}$ e' la retta per M_{PQ} con parametri direttori determinati da un vettore normale a $\vec{PQ}$, per esempio $(1, 1)$. Un'equazione cartesiana di tale asse e' quindi:

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Analogamente, l'asse del segmento $\overline{QR}$ e' la retta per M_{QR} con parametri direttori determinati da un vettore normale a $\vec{QR}$, per esempio $(1, 0)$. Un'equazione cartesiana di tale asse e':

$$2x_2 - 1 = 0.$$

Il loro punto di intersezione e' il punto C di coordinate $C = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Il raggio della circonferenza e' dato da

$$r = d(C, P) = \sqrt{10}/2.$$

Percio', l'equazione della circonferenza voluta si determina con

$$(x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 = 10/4.$$

(ii) Per disegnare la circonferenza, basta considerare il centro ed il raggio determinati al punto (i).
(iii) L'equazione della tangente a $\mathcal{C}$ in P e' data dalla formula

$$(2 - 1/2)(x_1 - 2) + (1 - 1/2)(x_2 - 1) = 0$$

cioe':

$$3x_1 + x_2 - 7 = 0.$$

Esercizio 3: Dati i vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare il volume del parallelepipedo avente come spigoli i tre vettori dati;

(ii) calcolare l'orientazione della terna ordinata $\{\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}\}$.

Svolgimento: (i) Il volume del parallelepipedo richiesto si trova calcolando il valore assoluto del determinante della matrice quadrata di ordine 3 che ha per colonne le coordinate della terna di vettori. Tale volume risulta uguale ad 1.

(ii) Il valore del determinante della matrice associata alla terna ordinata $\{\overline{y}, \overline{x}, \overline{z}\}$ e' - 1; segue che la terna ordinata e' una base non equiorientata (o equiversa) alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4: Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, sia dato il sottospazio vettoriale di equazione cartesiana

$$U: \ X_1 - X_2 = 0.$$

Determinare una base ortonormale b di $\mathbb{R}^3$, orientata positivamente ed i cui primi due versori appartengano al sottospazio U.

Svolgimento: Notiamo che U e' un piano vettoriale, cioe' e' un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2. Una base naturale per U e' data dai vettori:

$$\overline{v} = (1, 1, 0), \quad \overline{w} = (0, 0, 1)$$

(le cui coordinate sono scritte per riga per brevita'). Notiamo che

$$\langle \overline{v}, \overline{w} \rangle = 0$$

e che $\overline{w}$ e' gia' un versore. Percio' per determinare una base ortonormale di U, basta versorizzare $\overline{v}$ e si ottiene:

$$\overline{f}_1 := \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 := \overline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b. Per determinare il terzo vettore di b, basta considerare

$$\overline{f}_3 := \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = ||\overline{f}_3||^2 = 1.$$

Esercizio 5: Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, sia dato il sottospazio vettoriale U, di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} X_1 + X_2 & = & 0 \\ X_2 + X_3 & = & 0 \end{cases}.$$

Determinare una base ortonormale b' di $\mathbb{R}^3$, orientata positivamente ed il cui primo versore appartenga al sottospazio U.

Svolgimento: Notiamo che U e' una retta vettoriale. Un vettore direttore di U, i.e. una base di U, si trova risolvendo il sistema lineare omogeneo che definisce U. Ad esempio, una soluzione e' data dal vettore

$$\overline{v} = (1, -1, 1).$$

Percio', versorizzando $\overline{v}$ si ottiene:

$$\overline{f}_1 := \frac{\overline{v}}{||\overline{v}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Possiamo ora scegliere opportunamente un vettore di $\mathbb{R}^3$ che sia manifestamente ortogonale ad U, ad esempio

$$\overline{w} = (1, 1, 0).$$

Percio', versorizzando $\overline{w}$ otteniamo:

$$\overline{f}_2 = \frac{\overline{w}}{||\overline{w}||} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tali due versori sono i primi due vettori di b'. Per determinare il terzo vettore della base b', basta considerare

$$\overline{f}_3 := \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Tale base e' sicuramente ortonormale, inoltre e' orientata positivamente, dato che

$$Or(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3) = ||\overline{f}_3||^2 = 1.$$