Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Facolta' Ingegneria
Esercizi GEOMETRIA (Edile e Edile-Architettura) - a.a. 2008/2009
II Emisemestre - Settimana 3 - Foglio 11
Docente: Prof. F. Flamini - Tutore: Dott. M. Paganin

<u>Esercizi Riepilogativi Svolti</u>

Esercizio 1: Sia $\mathbb{R}^2$ il piano vettoriale euclideo, munito di base canonica e, e prodotto scalare standard. Siano $\overline{v} = (1, 2)$ e $\overline{w} = (-1, -1)$ due vettori espressi in componenti rispetto alla base canonica e.
(i) Calcolare l'orientazione della coppia ordinata $\{\overline{v},\ \overline{w}\}$, i.e. $Or(\overline{v}, \overline{w})$;
(ii) Sia S_0 la riflessione rispetto all'asse x_1. Calcolare $Or(S_0(\overline{v}), S_0(\overline{w}))$;
(iii) Sia S_φ la riflessione rispetto alla retta vettoriale passante per l'origine e formante un angolo convesso φ con l'asse x_1. Calcolare $Or(S_\varphi(\overline{v}), S_\varphi(\overline{w}))$;
(iv) Sia R_ψ la rotazione di centro l'origine e angolo ψ. Calcolare $Or(R_\psi(\overline{v}), R_\psi(\overline{w}))$.
Svolgimento: (i) Osserviamo che

$$det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 = Or(\overline{v}, \overline{w})$$

percio' la coppia ordinata e' orientata positivamente.
(ii) $Or(S_0(\overline{v}), S_0(\overline{w})) = det(S_0)Or(\overline{v}, \overline{w}) = -1 = -Or(\overline{v}, \overline{w})$.
(iii) Come prima $Or(S_\varphi(\overline{v}), S_\varphi(\overline{w})) = det(S_\varphi) = -1 = -Or(\overline{v}, \overline{w})$.
(iv) $Or(R_\psi(\overline{v}), R_\psi(\overline{w})) = det(R_\psi) = 1 = Or(\overline{v}, \overline{w})$.

Esercizio 2: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, siano assegnati i punti

$$P = (1, 2),\ Q = (2, -1),\ R = (1, 0),$$

le cui coordinate sono scritte per comodita' per riga.

Trovare il punto Q' simmetrico di Q rispetto a P e la retta $\underline{r}$ simmetrica rispetto a P della retta $\underline{r}_{RQ}$.
Svolgimento: Il punto Q' e' il punto, diverso da Q, che giace sulla retta per P e Q e che' e' a distanza pari a $d(P, Q)$ da P. La retta $\underline{r}$ e' la retta parallela alla retta per R e Q e che passa per Q' trovato precedentemente.

Esercizio 3: Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$, sia $\mathcal{Q}$ il trapezio di vertici: $(1,1), \quad (6,1), \quad (2,3), \quad (3,3)$.
(i) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la traslazione $T_{\overline{p}}$, dove il vettore $\overline{p} = (0,-1)$;
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la riflessione S_0 rispetto all'asse x_1;
(iii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione R_π di angolo π.
Svolgimento: (i) Si tratta del trapezio $\mathcal{Q}'$ di vertici $(1,0), \quad (6,0), \quad (2,2), \quad (3,2)$.
(ii) La matrice di S_0 e' data da

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(1,-1), \quad (6,-1), \quad (2,-3), \quad (3,-3)$.
(iii) La matrice di R_π e' data da

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Percio' $B(\mathcal{Q})$ e' il trapezio di vertici $(-1,-1), \quad (-6,-1), \quad (-2,-3), \quad (-3,-3)$.

Esercizio 4: Sia $\mathcal{Q}$ il quadrato in $\mathbb{R}^2$ di vertici: $(1,1), \quad (1,-1), \quad (-1,1), \quad (-1,-1)$.
(i) Per quali angoli φ la rotazione R_φ manda il quadrato $\mathcal{Q}$ in se stesso?
(ii) Disegnare l'immagine di $\mathcal{Q}$ dopo la rotazione $R_{\pi/4}$.
Svolgimento: (i) Sono tutti gli angoli della forma $\varphi = k\frac{\pi}{2}$, con k un numero intero.
(ii) La matrice della rotazione $R_{\pi/4}$ e' data da:

$$A := \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio' $A(\mathcal{Q})$ e' il quadrato di vertici $(-\sqrt{2},0), \quad (0,\sqrt{2}), \quad (0,-\sqrt{2}), \quad (\sqrt{2},0)$.

Esercizio 5: Sia $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano con riferimento cartesiano ortonormale $(O; x_1, x_2)$.
(i) Scrivere le equazioni della rotazione $R_{P_0,\pi/6}$ di centro il punto $P_0 = (1,2)$ ed angolo $\pi/6$;
(ii) Scrivere le equazioni della simmetria S_r rispetto alla retta

$$r: \quad x_1 - x_2 + 1 = 0;$$

(iii) Verificare che la retta s, passante per P_0 e di equazione cartesiana

$$(2-\sqrt{3})x_1 - x_2 + \sqrt{3} = 0$$

e' tale che $S_r \circ S_s = R_{P_0,\pi/6}$.

Svolgimento: (i) La matrice della rotazione di angolo $\pi/6$ attorno all'origine e':

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Percio', le formule di rotazione sono, in forma vettoriale, date da

$$\underline{x}' = A(\underline{x}) + P_0 - A(P_0),$$

equivalentemente in forma cartesiana

$$x_1' = 1/2(x_1 - \sqrt{3}x_2 + 1 + 2\sqrt{3}) \quad x_2' = 1/2(\sqrt{3}x_1 + x_2 + 2 - \sqrt{3}).$$

(ii) Sia $P = (\alpha, \beta)$. La retta n passante per P e perpendicolare a r ha equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = \alpha + \beta.$$

Sia $N = r \cap n$, che ha coordinate

$$N = (\frac{1}{2}(\alpha + \beta - 1), \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1)).$$

Allora P' sara' il simmetico di P rispetto a r se e solo se $P' = 2N - P = (\beta - 1, \alpha + 1)$. Questo significa che le equazioni della simmetria sono

$$x_1' = x_2 - 1 \quad x_2' = x_1 + 1.$$

(iii) Se deve essere $S_r \circ S_s = R_{P_0,\pi/6}$, allora $S_s = S_r^{-1} \circ R_{P_0,\pi/6} = S_r \circ R_{P_0,\pi/6}$, perche' $S_r = S_r^{-1}$. Le equazioni di S_s sono quindi:

$$x_1' = 1/2(\sqrt{3}x_1 + x_2) - \sqrt{3}/2 \quad x_2' = 1/2(x_1 - \sqrt{3}x_2 + 3) + \sqrt{3}.$$

Mediante questa trasformazione, notiamo che il luogo fissato da S_s e' proprio la retta s, come volevasi dimostrare.